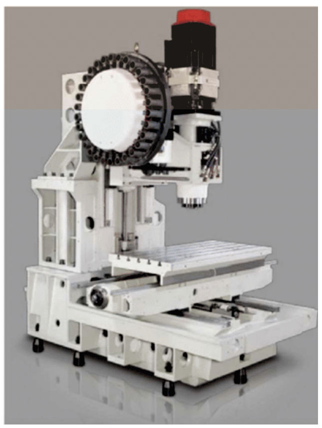
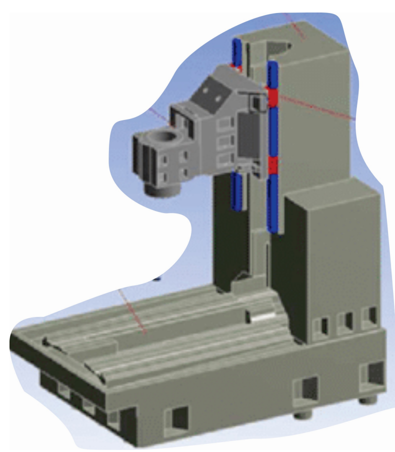
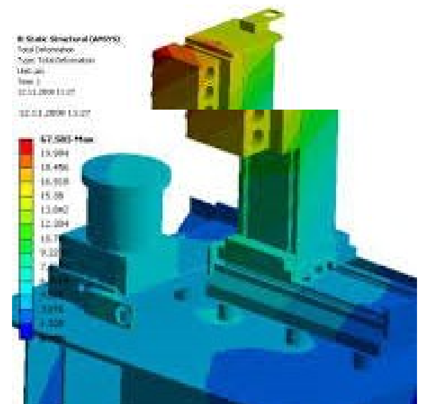
FTN - DPM - LAMA
Predmet: **Projektovanje proizvoda CAD/CAE**
Novi Sad, NOVEMBAR 2020.

2. Faze proračuna u MKE

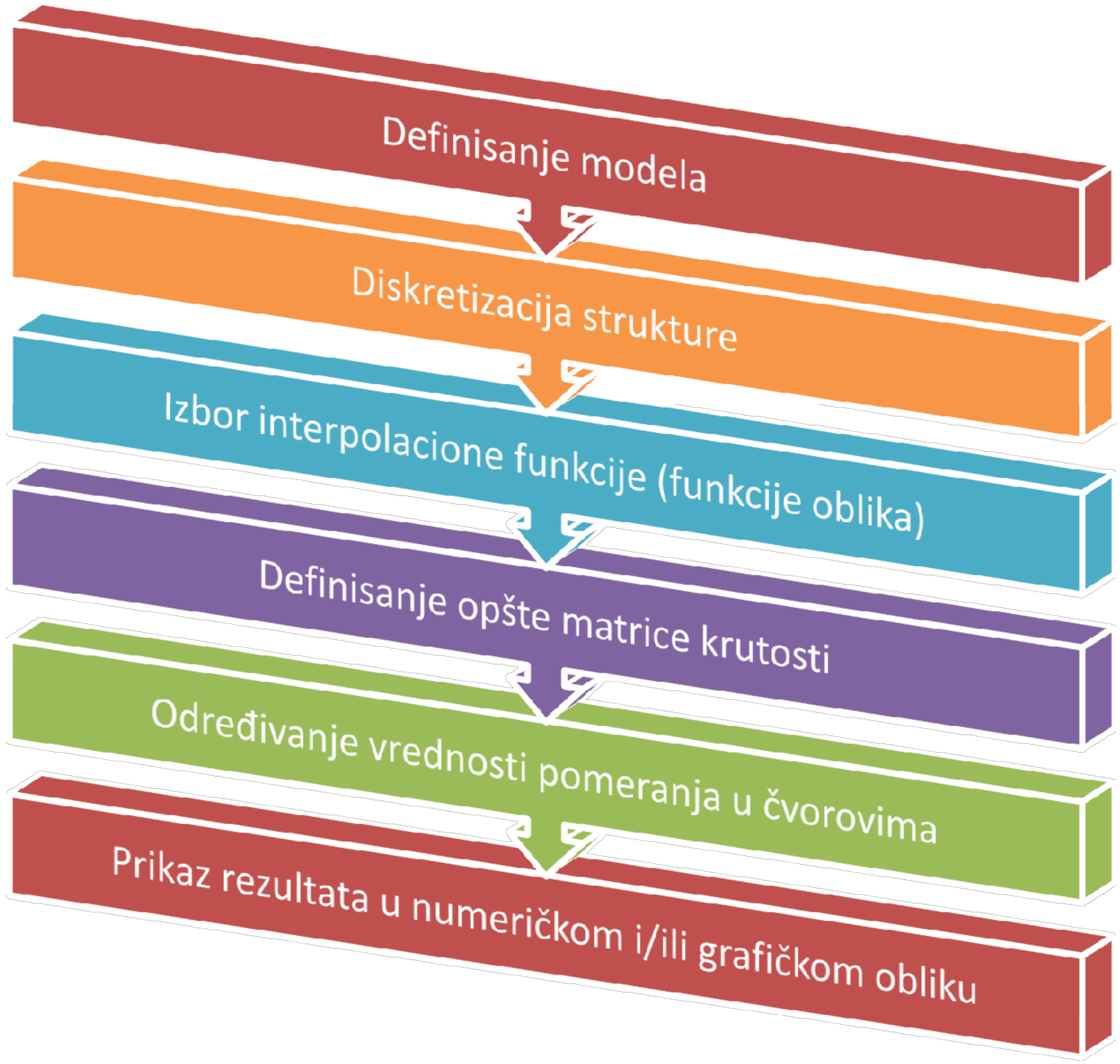






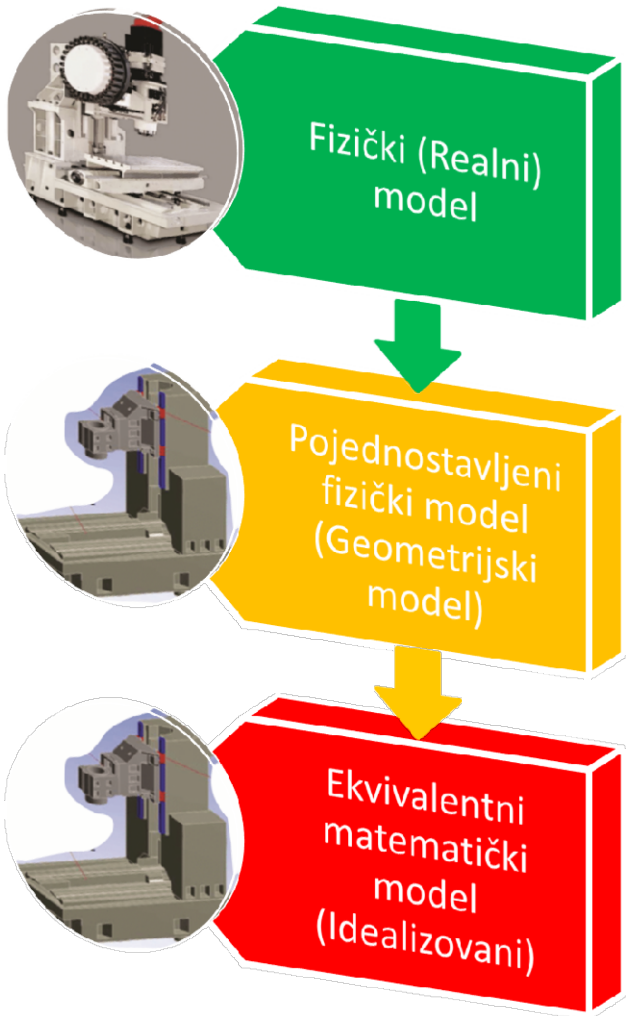
Faze proračuna u MKE

Analiza primenom metode konačnih elemenata se odvija u nekoliko faza:



Faze proračuna u MKE

1. Definisanje modela



Formiranje modela za proračun je pripremna faza pre analize metodom konačnih elemenata. U procesu definisanja modela potrebno je preslikati geometrijske karakteristike fizičkog u matematički model.

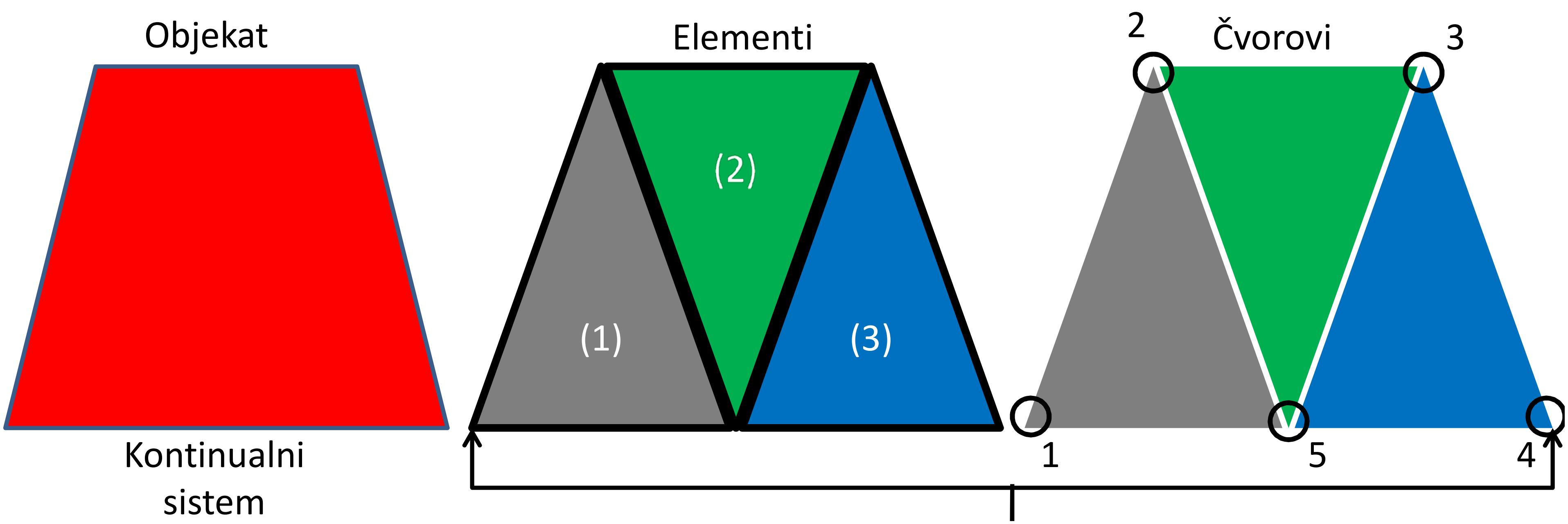
Geometrijski model definiše projektant u nekom od CAD programskih sistema. . Geometrijski model može da sadrži geometrijske elemente koji nemaju značaja za analizu jer ne utiču na naponsko-deformacionu sliku relanog sistema koji se analizira.

Idealizovan model je uprošćen model koji ne mora da predstavlja celinu realnog sistema. Idealizacija je sagledavanje realnog sistema od strane korisnika kojom se postavlja koncept modela, uklanjaju nepotrebni detalji za analizu, prepoznaje simetrija, redukuje model

Faze proračuna u MKE

<u>*2. Diskretizacija modela*</u>

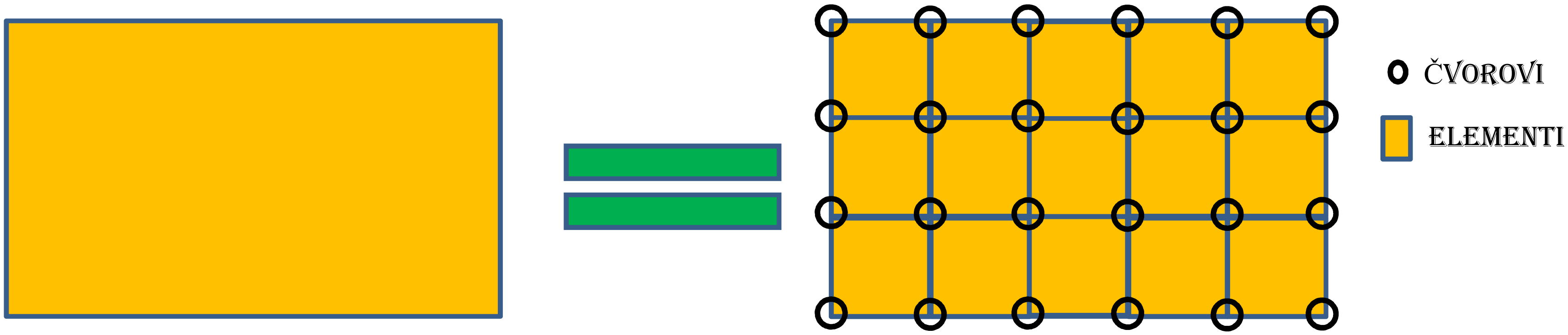
- Modeliranje tela deljenjem na ekvivalentni sistem konačnih elemenata, međusobno povezanih na konačnom broju tačaka (čvorova).
- Kontinualna elastična struktura (domen) se deli na male definisanje podstrukture (podomene), koji se nazivaju <u>**elementima**</u>. Elementi su međusobno povezani u <u>**čvorovima.**</u> Čvorovi imaju <u>**stepene slobode**</u>.
- Diskretizacija je proces poznat pod nazivom meširanje.



Diskretni sistem = Dikretizacija (Meširanje)

Faze proračuna u MKE

2. Diskretizacija modela



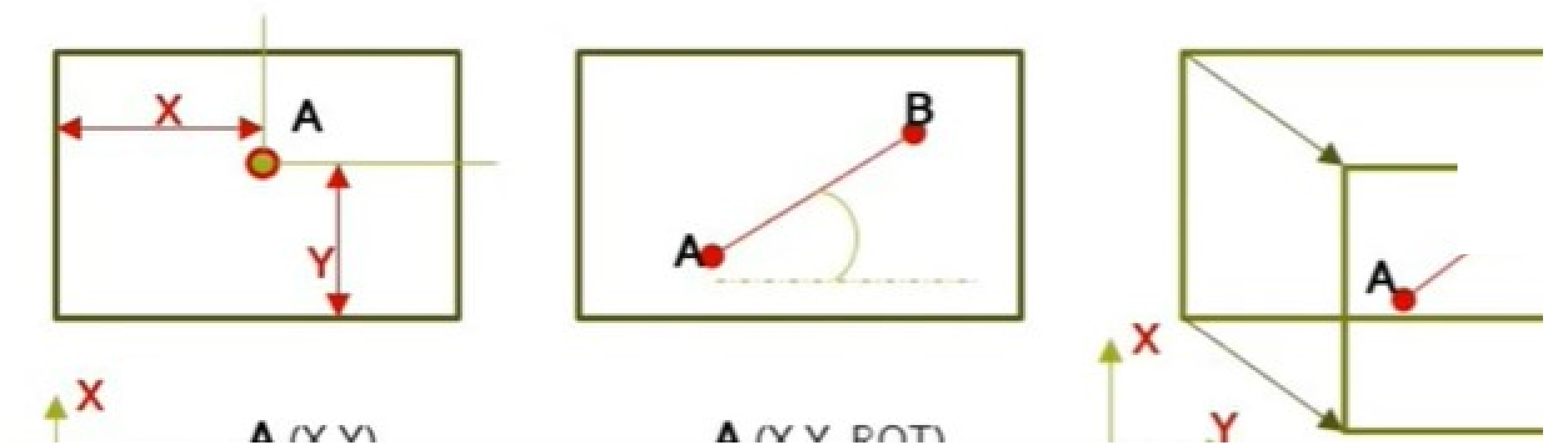
Kontinualni domen   Diskretizovani domen

Analiza sistema spregnutih konačnih elemenata, dobijenih **diskretizacijom kontinualne strukture**, omogućava numeričku simulaciju, odziva strukture na zadate pobude.

Faze proračuna u MKE

2. Diskretizacija modela – Stepeni slobode

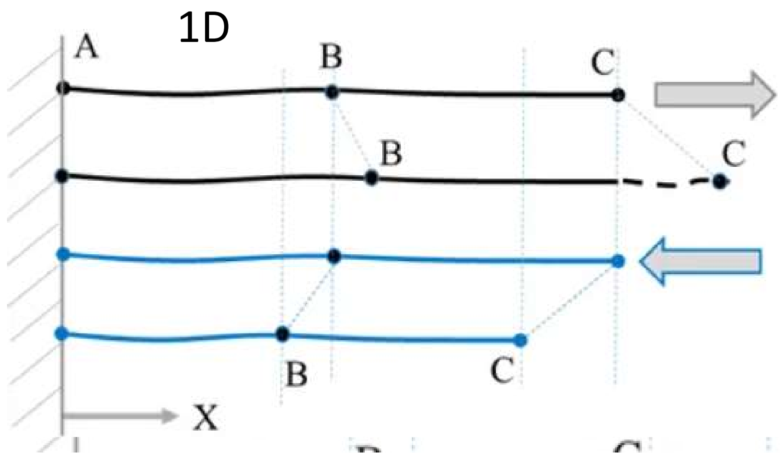
- **Broj stepeni slobode** se može definisati kao minimalni broj nezavisnih parametar (koordinata, kretanja, temperatura, itd) koje u potpunosti određuju položaj sistema u prostoru.
- U analizi MKE stepeni slobode imaju veliki značaj, zbog činjenice da rešenje simulacije (vreme) zavisi od broja stepeni slobode sistema koji se analizira.
- Pozicija krutog tela u prostoru je definisana sa tri komponente **translacije** i tri komponente **rotacije,** što znači da **ima šest stepeni slobode**.



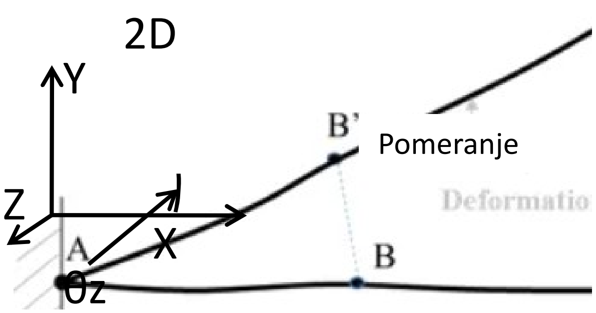
- **Broj stepeni slobode** zavisi od tipa konačnog elementa (1D, 2D, 3D), familije elementa (ljuska, ploča, greda itd) i tipa analize.

Faze proračuna u MKE

2. Diskretizacija modela – Stepeni slobode



1D prostor se sastoji od samo 1 dimenzije i stoga su matrice male što rezultira bržim rešenjem problema.
U slučaju 1D prostora, samo 1 dimenzija odnosno jedan stepen slobode je dovoljan da definiše položaj.

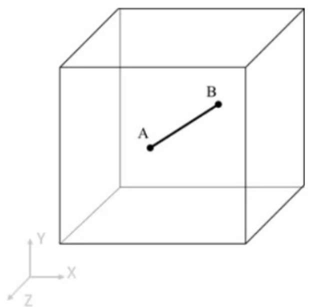


Kod 2D problema položaj tačke C i B je u potpunosti određen koordinatama X, Y i θz.
U ovom slučaju je u pitanju tri stepena slobode (dve translacije + jedna rotacija)

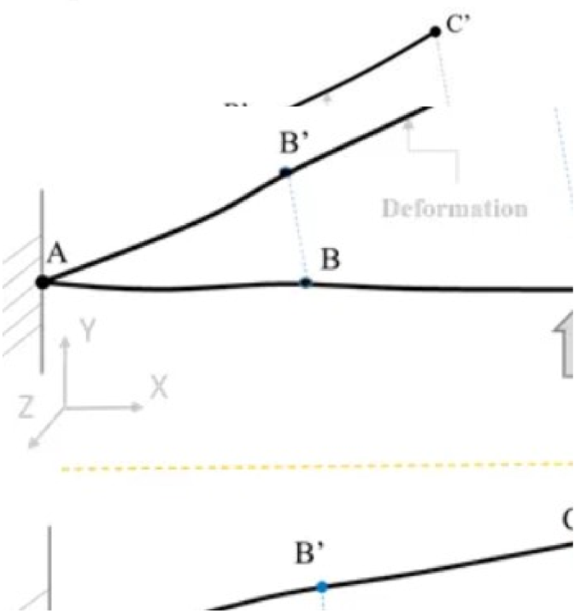
Faze proračuna u MKE

2. Diskretizacija modela – Stepeni slobode

3D



Da bi se definisao položaj tačke A ili bilo koje tačke na liniji AB, minimalni broj parametara iznosi 6 (tri translacije (Ux, Uy, Uz) i tri rotacije (Rx, Ry, Rz))

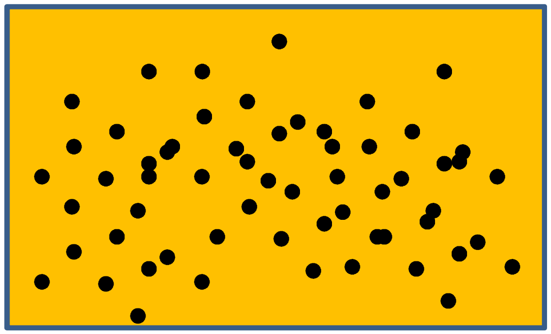


- Ukupan broj stepeni slobode za dikretizovani model, jednak je ukupnom broju čvorova pomnoženim sa brojem stepeni slobode po čvoru.

Faze proračuna u MKE

2. Diskretizacija modela – Čvorovi i Elementi

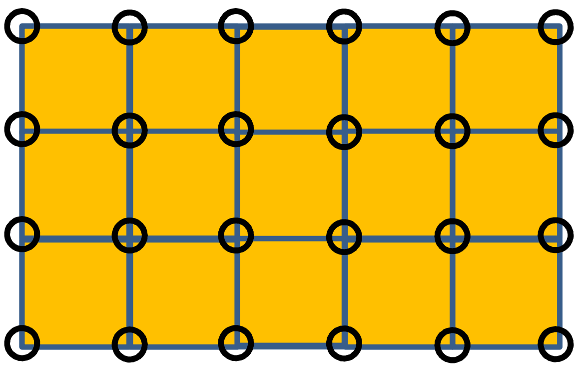
Fizičke veličine koje su obuhvaćene modelom dobijaju se u diskretnom obliku, tj. u ***čvorovima koje proizilaze iz diskretizacije***.



Broj tačaka (No.)= **∞**

Br. Stpeni slobode po tački (NoS) = **6** (za 3D problem)

Ukupan br. jed. za rešavanje = **No * NoS = ∞ * 6 = ∞**



Broj čvorova (No.)= **24**

Br. Stpeni slobode po tački (NoS) = **6** (za 3D problem)

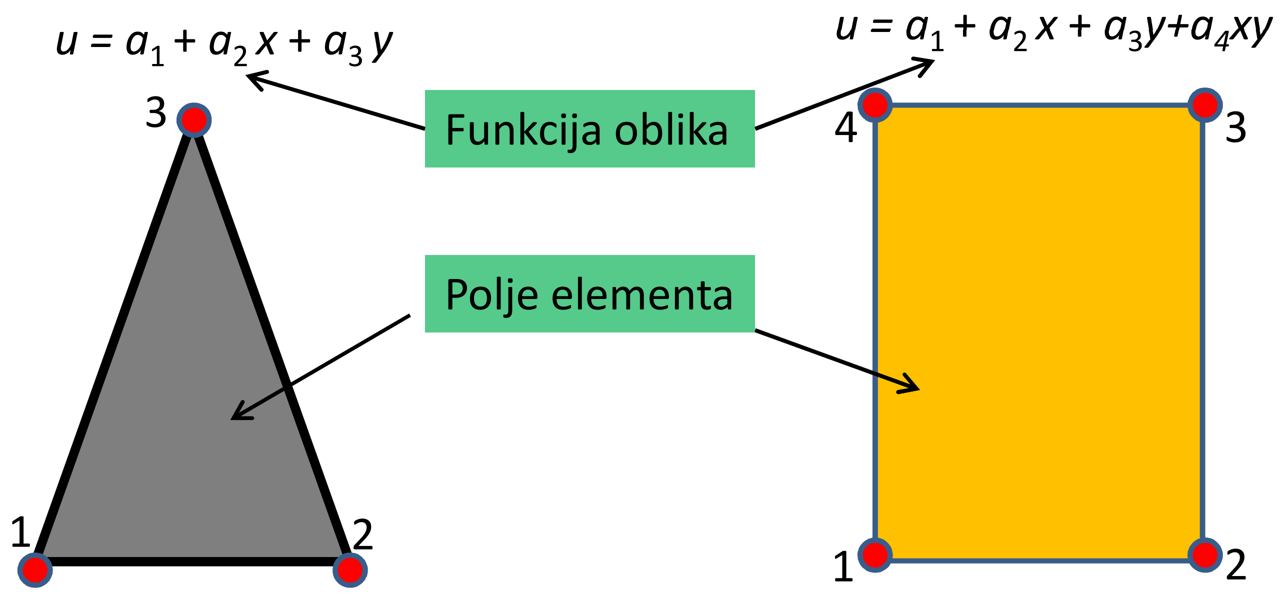
Ukupan br. jed. za rešavanje = **No * NoS = 24 * 6 = 144**

- Metoda konačnih elemenata vrši proračun u ograničenom broju tačaka, a zatim interpolira rezultate za celi domen (površini i/ili) zapreminu.

Faze proračuna u MKE

3. Interpolacione funkcije (Funkcije oblika)

- Interpolacione funkcije se koriste za izračunavanje vrednosti polja promenljivih veličina (Ux, Uy...itd) između čvorova u okviru elemenata.
- Interpolacione funkcije definiše polje promenjivih u svakom konačnom elementu.
- Kao interpolacije funkcije u metodi konačnih elementa se koriste polinomi i to: ***linearni, kvadratni i kubni.***



Konačni element oblika trougla

Konačni element oblika pravougaonika

Faze proračuna u MKE

4. Matrica krutosti u MKE

- Jednačina linearne statičke analize:

$$\{F\} = [K]\,\{u\}$$

Sila – akcija (Poznata veličina)

Krutost – svojstvo sistema (Poznata veličina)

Pomeranje – ponašanje sistema (Nepoznata veličina)

Formulacija matrice krutosti za dati oblik elementa

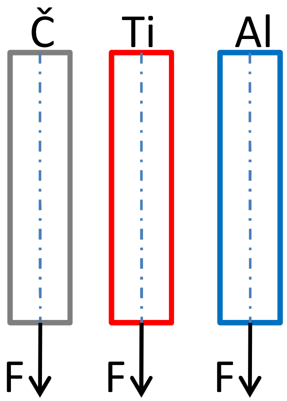
Diskretizacija (1D, 2D ili 3D)

Rešavanje jednačina

Pronalaženje nepoznatih (pomeraja, napona, tepm., itd)

Faze proračuna u MKE

4. Matrica krutosti u MKE



K = AE/L;
Ač = Ati = Aal;
Lč = Lti =Lal;
Kč > Kti >Kal

- Krutost je definisana kao **SILA/POMERANJE** u N/mm.
- Krutost je jednaka **sili** koja je potrebna da se proizvede **jedinično pomeranje.**
- Krutost zavisi od geometrije kao i od mehaničkih svojstava materijala.

Metode za definisanje matrice krutosti:

1. Direktni ravnotežni metod (Direct Finite Element Model),
2. Varijaciona metoda (Variational Finite Element Model)
3. Metode težinskih ostatka (Methods of Weighted Residuals)

Direktni metod je lak za razumevanje ali veoma težak za programiranje, dok su Varijaciona metoda i Metoda težinskih ostataka veoma teške za razumevanje, ali lake za programiranje.

Usled ovoga razloga svi programski sistemi koji se koriste za MKE analizu koriste zadnje dve metode za formulaciju matrice krutosti

Faze proračuna u MKE

4. Matrica krutosti – Konačni elementi tipa ŠTAPA
Direktan metod – Primer

- $\sigma_x = F/A$; $\varepsilon = u/L$
- $\sigma_x = \varepsilon * E$; $F/A = Eu/L$; $F = AE/L*u$
- $\Sigma F_x = 0$; $F_i + F_j = 0$; $F_i = - F_j$
- *Slučaj 1,* $u_i > 0$; $u_j = 0$

  $F_i = (AE/L) * u_i$; $F_j = - F_i = - (AE/L) * u_i$

- *Slučaj 2,* $u_i = 0$; $u_j > 0$

  $F_j = (AE/L) * u_j$; $F_i = - F_j = - (AE/L) * u_j$

Iz Slučaja 1 i Slučaja 2

$F_i = (AE/L) * u_i - (AE/L) * u_j$;

$F_j = - (AE/L) * u_i + (AE/L) * u_j$;

$$[k]\{u\} = \{f\}$$

$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}$$

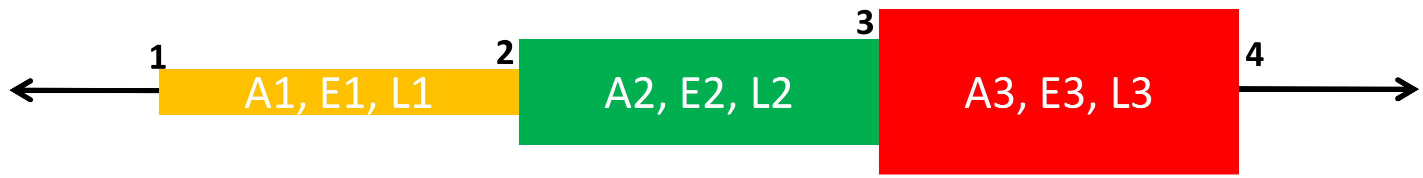
$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{(2x2)} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

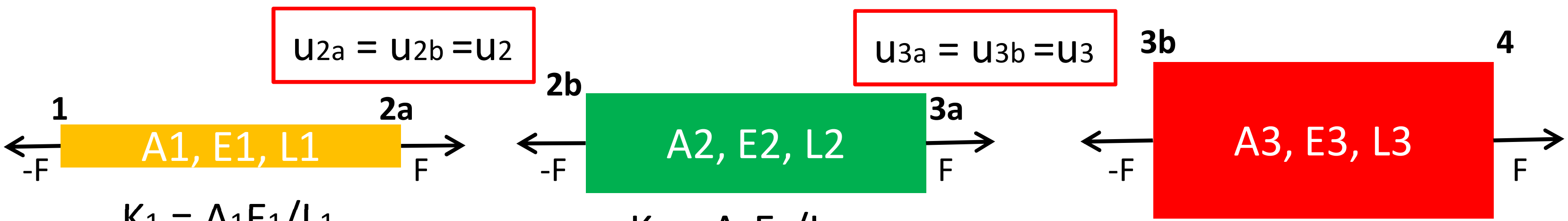
Vektor sila **Matrica krutosti** **Vektor pomeraja**

Faze proračuna u MKE

4. Matrica krutosti – Ukupna matrica krutosti

Primer – tri konačna elementa oblika štaša





$K_1 = A_1E_1/L_1$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{2a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_{2a} \end{Bmatrix}$$

$K_2 = A_2E_2/L_2$

$$\begin{Bmatrix} F_{2b} \\ F_{3a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2b} \\ u_{3a} \end{Bmatrix}$$

$K_3 = A_3E_3/L_3$

$$\begin{Bmatrix} F_{3b} \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3b} \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

1 element

$$[K] = \sum_k [k_n]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

2 element

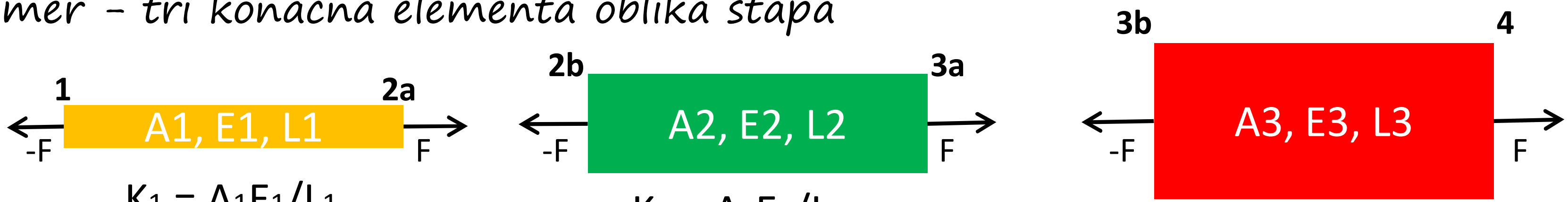
3 element

$$F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{2a} - F_{2b} \\ F_{3a} - F_{3b} \\ F_4 \end{Bmatrix} \qquad U = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Faze proračuna u MKE

4. Matrica krutosti – Ukupna matrica krutosti

Primer – tri konačna elementa oblika štapa



$K_1 = A_1E_1/L_1$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{2a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_{2a} \end{Bmatrix}$$

$K_2 = A_2E_2/L_2$

$$\begin{Bmatrix} F_{2b} \\ F_{3a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2b} \\ u_{3a} \end{Bmatrix}$$

$K_3 = A_3E_3/L_3$

$$\begin{Bmatrix} F_{3b} \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3b} \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

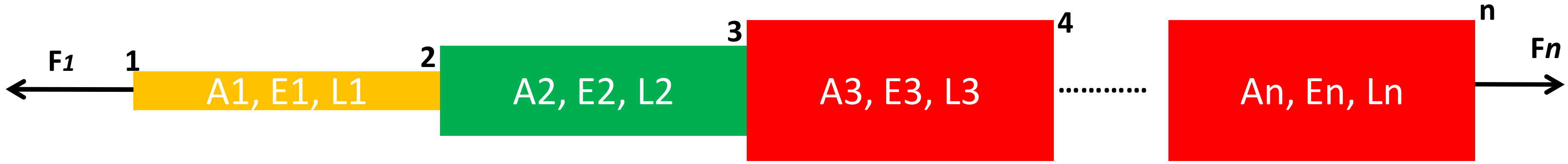
$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

Za $u_1 = 0$ i $\boxed{u_{2a} = u_{2b} = u_2}$ $\boxed{u_{3a} = u_{3b} = u_3}$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{2a} - F_{2b} \\ F_{3a} - F_{3b} \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

Faze proračuna u MKE

4. Matrica krutosti – Ukupna matrica krutosti



Matrične jednačine celokupnog sistema u kojoj su definisani granični uslovi predstavljaju spregnuti sistem algebarskih jednačina u obliku:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots.. & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots.. & K_{2n} \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots.. & K_{nm} \end{bmatrix}^{-1}$$

gde je ***n* - *ukupan broj nepoznatih stepeni slobode razmatranog problema***.

Faze proračuna u MKE

5. Prikaz rezultata proračuna

- Dobijeni rezultati primenom metode konačnih elemenata se dalje analizuraju i interpretiraju.
- Zaključak svake analize se svodi na određivanje pomeranja, deformacija, napona, sopstvenih frekvencija, temperatura, toplotnog fluksa itd.
- Današnji programski sistemi bazirani na metodi konačnih elemenata poseduju postprocesore koji omogućavaju interpretaciju rezulata u numeričkom i grafičkom obliku.