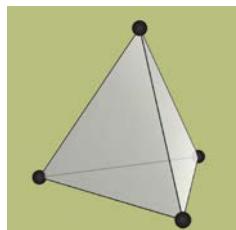
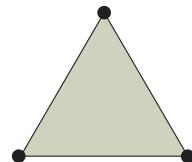
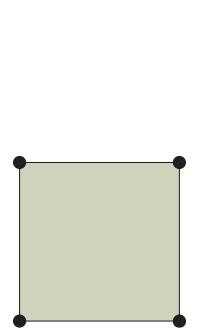




3. Tipovi konačnih elemenata

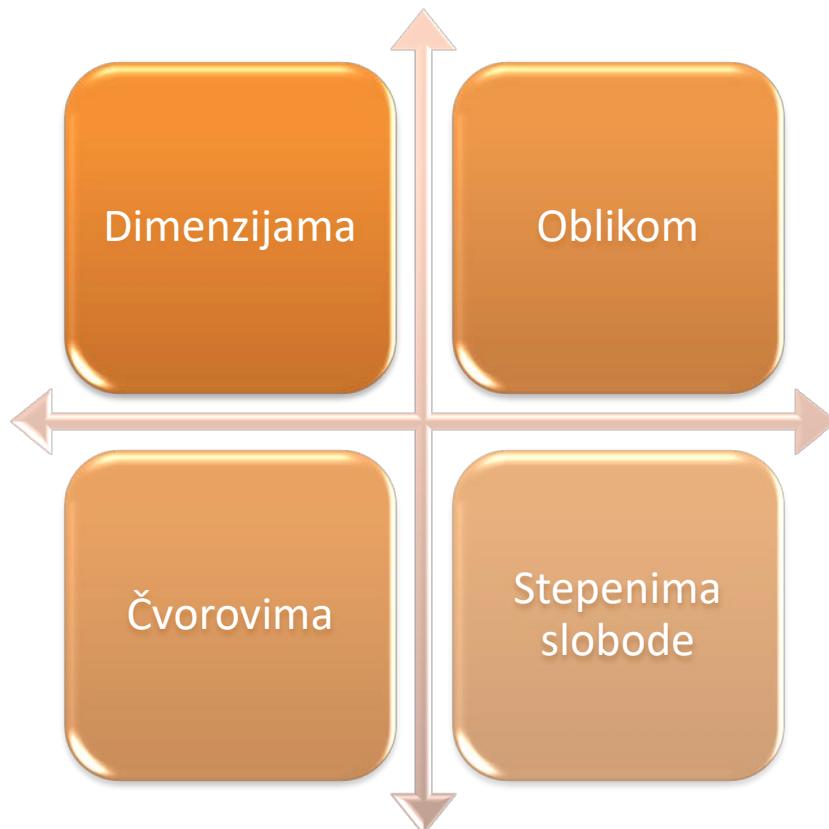




Tipovi konačnih elemenata

1. Podela konačnih elemenata

Postoje različite vrste i tipovi konačnih elemenata. Svaki konačni element je definisan:

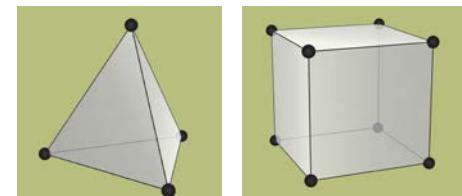
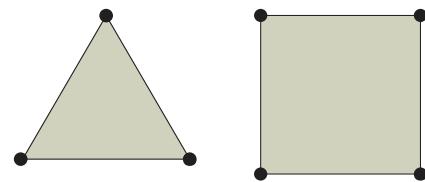
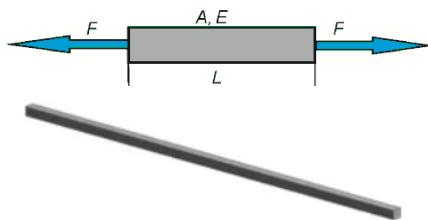
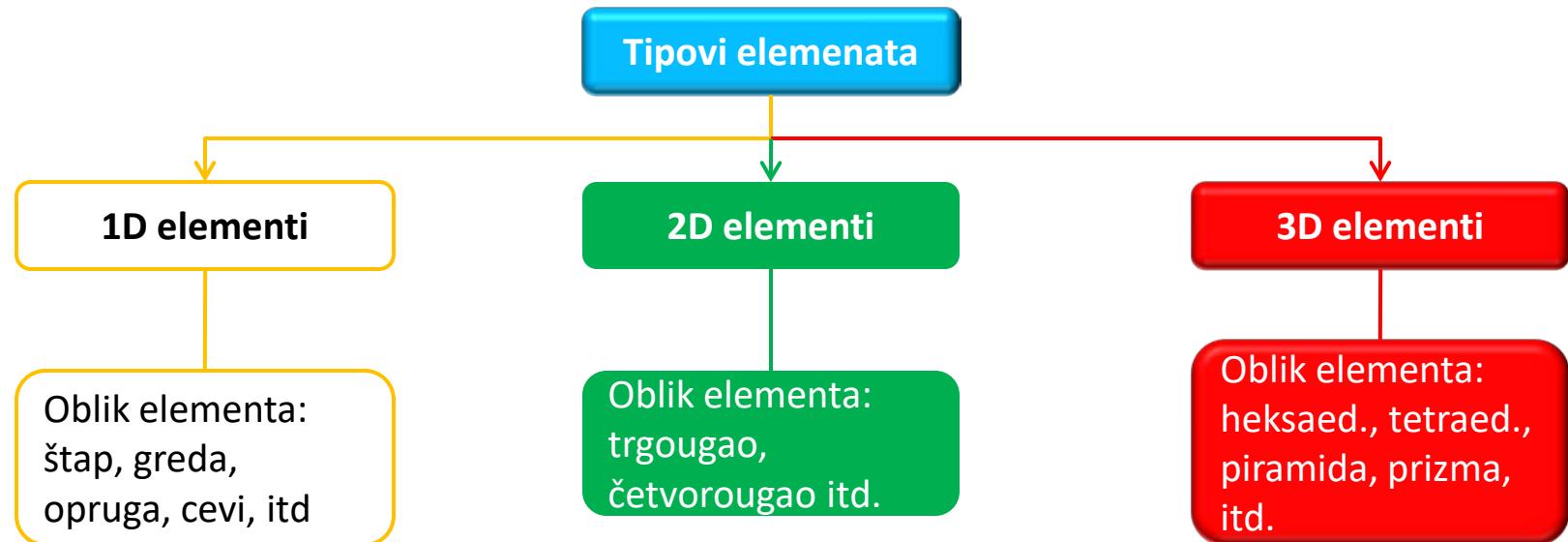




Tipovi konačnih elemenata

1. Podjela konačnih elemenata

Osnovni tipovi konačnih elemenata su **određeni prostorom (geometrijskim dimenzijama)** koji koriste.





Tipovi konačnih elemenata

1. Podela konačnih elemenata

Konačne elemente je moguće klasifikovati i prema:

Familiji – grupaciji

- (ljudska, ploča, greda),

Redu interpolacionih funkcija

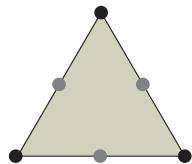
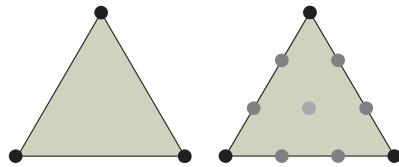
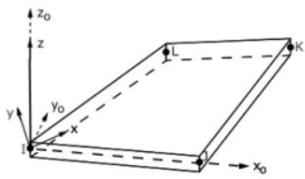
- (linearan, paraboličan, kubni),

Fizičkim osobinama

- tanka ljudska, debela ljudska

Svojstvima materijala

- izotropan, anizotropan



Tipovi konačnih elemenata



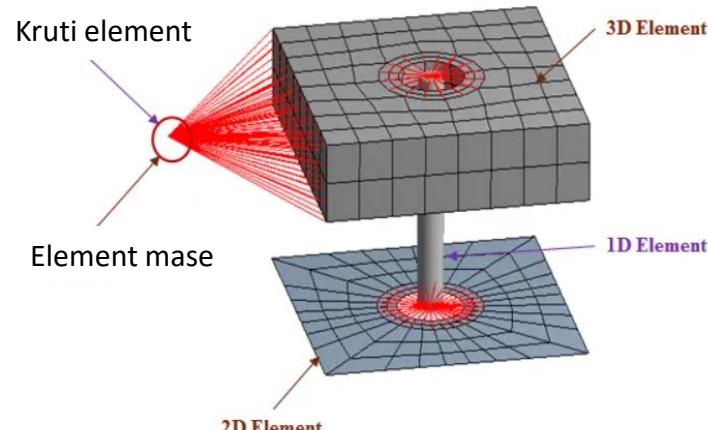
2. Podela konačnih elemenata

- Posebnu grupu elemenata čine vezivni ili granični elementi.
- Granični elementi su kategorija koja služi za formiranje veza na granicama kontinuma, koja matematičkom modelu definiše neki uslov ograničenja ili opterećenja.

Pojedini tipovi graničnih elemenata su:

- Element za definisanje mase;
 - Element za definisanje krutog tela;
 - Elementi za definisanje krutosti;
 - Elementi za definisanje prigušenja;
- } } }
- Element tipa tačke
- Element tipa opruge

Ovi elementi se primarno ne koriste za definisanje geometrije modela, već za definisanje veza između elemenata na modelu, komponenti mase itd.





Tipovi konačnih elemenata

2. Jednodimenzionalni konačni elementi

- U slučaju 1D elemenata, jedna od dimenzija je veoma velika u poređenju sa druge dve dimenzije.
- Jednodimenzionalni konačni elementi se mogu podeliti na: ***štapove, grede, granične elementi, cevne elementi, osno-simetrične ljske itd.***
- Dužina se definiše modelovanjem linije, dok se druge dimenzije definišu dodeljivanjem odgovarajućih preseka liniji.
- **Primena:** dugačka vratila, spojevi u zglobovima sa jednom osom rotacije, vezivni elementi.

Prednosti:

- Brži proračun;
- Lakše modeliranje i povezivanje;
- Jednostavno je napraviti promene na modelu;
- Pogodni za automatizaciju proračuna.

1 1D



X>> Y, Z

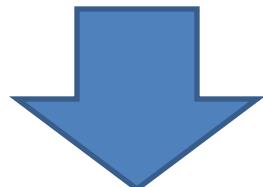
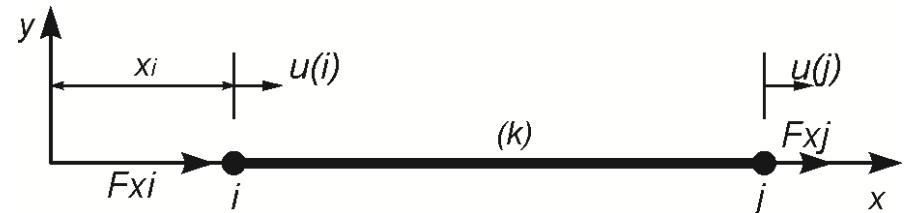
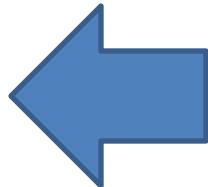


Tipovi konačnih elemenata

2. 1D konačni elementi tipa štapa

- Konačni element tipa štapa ima **dva čvora i po jedna stepen slobode u svakom čvoru.**
- Elementi tipa **štapa** služi za određivanje naprezanje na zatezanje i/ili pritisak.
- Za slučaj konstante površine poprečnog preseka konačnog elementa oblika štapa po celoj dužini matrica krutosti ima oblik:

$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}$$



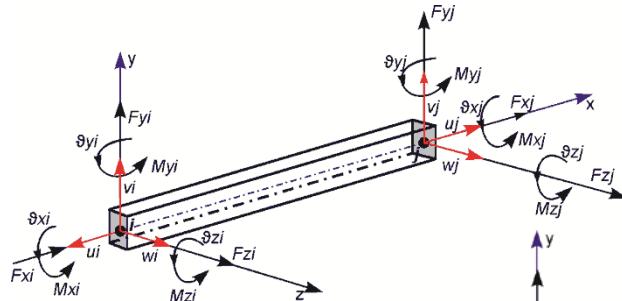
$$[k]_{(k)} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



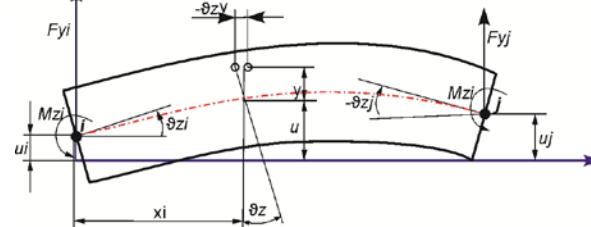
Tipovi konačnih elemenata

2. 1D konačni elementi tipa grede

- Konačni element tipa grede je element sa dva čvora (i, j). Element tipa grede može služiti za ravanske 2D analize, ali i za prostorne 3D analize na **naprezanje, zatezanje, pritisak, savijanje i uvijanje**.
- Za slučaj analize u **xy ravni**, konačni element ima po **tri stepena slobode u svakom čvoru**. **Dve translacije u x i y pravcu i jednu rotaciju oko z ose.**
- Za prostorne 3D analize konačni element ima po **šest stepeni slobode u svakom čvoru**. **Tri translacije u x, y i z pravcu i tri rotaciju oko x, y i z ose.**
- Pogodni su za analize kada je odnos vitkosti elementa koji se analizira $(GAL^2)/(EI) > 30$.



Konačni element u obliku grede



Konačni element tipa grede za slučaj savijanja u xy ravni

Matrica krutosti za slučaj savijanja u xy ravni

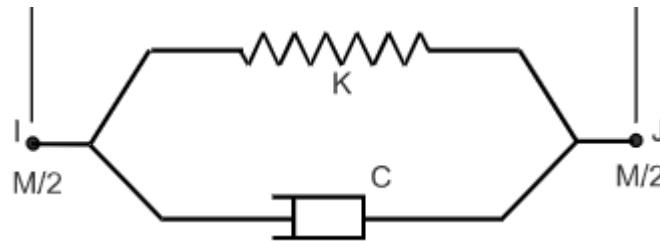
$$[k]_{(k)} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \text{ simetrično}$$



Tipovi konačnih elemenata

2. 1D konačni elementi – Granični elementi tipa opruge

- Konačni element tipa opruge **ima dva čvora na krajevima i po jedan stepen slobode u svakom čvoru.**
- Ne podržava analize na savijanje i uvijanje, dok se smatra da je sila konstantna po celom elementu.
- Pojedini elementi tipa opruge služe i za definisanje prigušenja pri dinamičkoj analizi.
- Može se koristiti za modeliranje hidrauličnih cilindara.
- Matrica krutosti je ista kao i kod elementa tipa štapa.



Konačni element tipa grede za slučaj savijanja u xy ravni

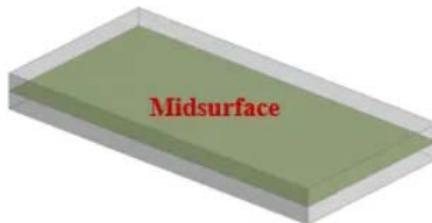


Tipovi konačnih elemenata

3. Dvodimenzionalni konačni elementi

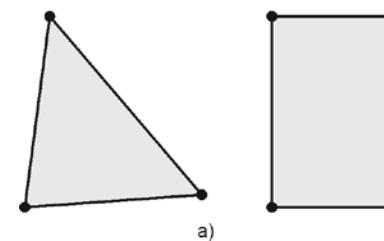
- Kod 2D elemenata, dve dimenzije su veoma velike u poređenju sa trećom dimenzijom.
- Koriste se za analizu problema koji se mogu posmatrati kao dvodimenzionalni (**ravno stanje deformacije i napona, osnosimetrično stanje deformacije**)
- Dužina stranica se definiše modeliranjem, pri čemu se izvlači srednja površina i određuje debljina sa obe strane površine.
- Najčešće su oblika: trougla, četvorougla (kvadrat, pravougaonik, romb)
- Praktična primena:** tanke posude, delovi od lima, plastični delovi poput instrumentalnih ploča itd.
- Uopšte posmatrano 2D diskretizacija se koristi kada je odnos **širine i debljine veći od 20**.

2 2D

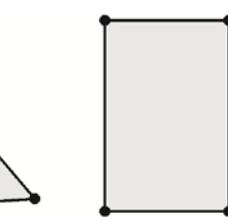


Princip definisanja (modeliranja) 2D elementa

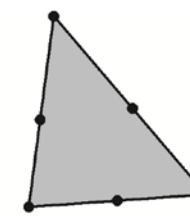
$X, Z \gg Y$



a)



b)



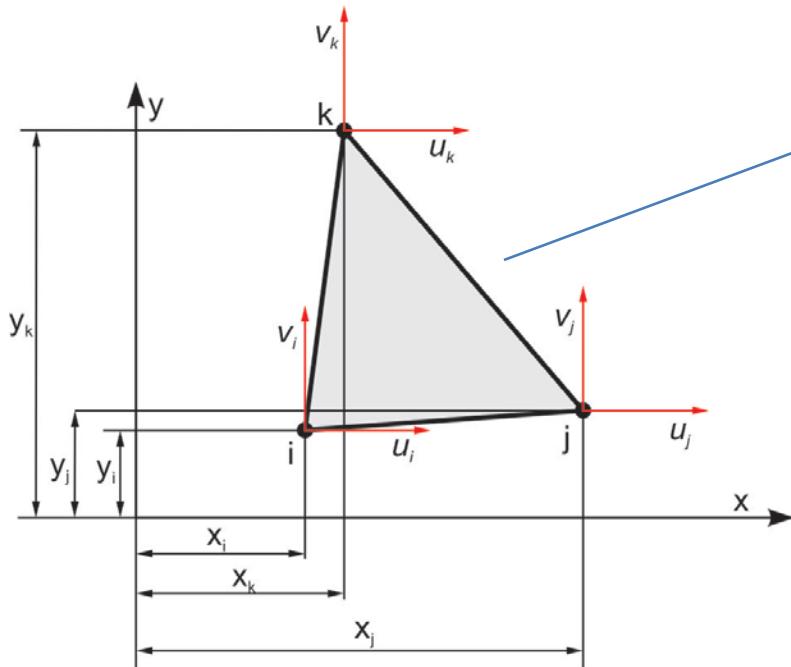
Dvodimenzionalni (ravanski) konačni elementi:
a) linearni; b) kvadratni



Tipovi konačnih elemenata

3. 2D konačni elementi tip trougla

- Standardni ravanski konačni element oblika trougla ima tri čvora i u svakom čvoru po dva stepena slobode.
- Diskretizacijom ravne strukture na trougaoni konačni element (k) u xy-ravni, dobija se element sa čvorovima i, j i k .



$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix}$$



$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{61} & k_{62} & \dots & k_{66} \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

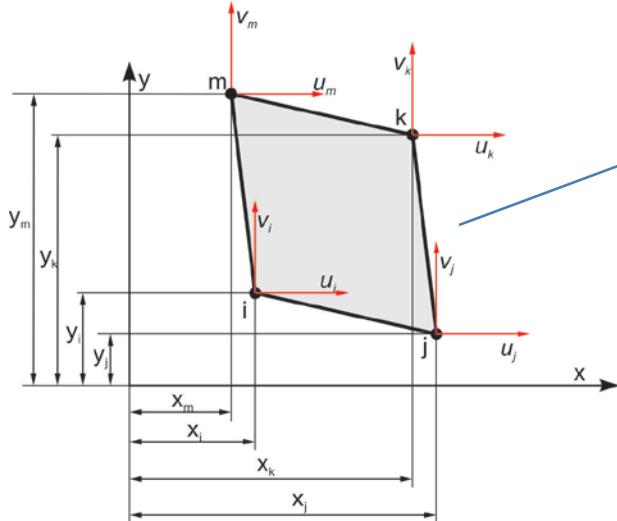
Matrica krutosti



Tipovi konačnih elemenata

3. 2D konačni elementi tip četvorougla

- Ravanski konačni element oblika četvorougla - četiri čvora i u svakom čvoru po dva stepena slobode.
- Diskretizacijom ravne strukture na konačnim elementom (k) u xy-ravni, dobija se element sa čvorovima i, j, k i m .



$$k_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{ik} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{km} & k_{jm} \\ k_{ki} & k_{kj} & k_{kk} & k_{km} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mk} & k_{mm} \end{bmatrix}$$



$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{81} & k_{82} & \dots & k_{88} \end{bmatrix}_{8 \times 8}$$

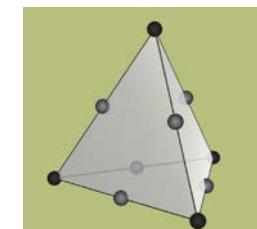
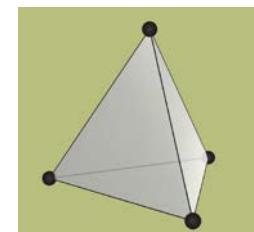
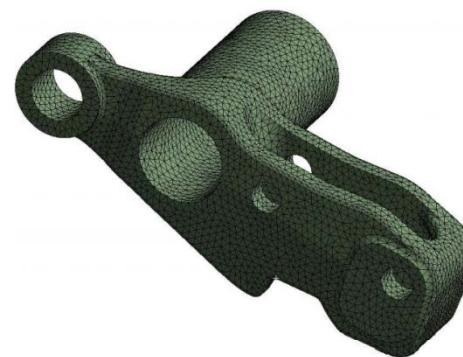
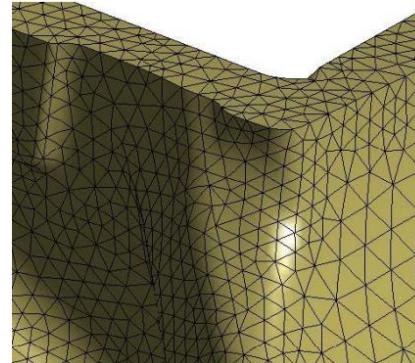
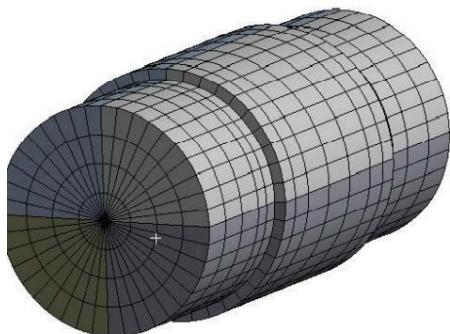
Matrica krutosti



Tipovi konačnih elemenata

4. Trodimenzionalni konačni elementi

- Prostorni konačni elementi se koriste za analizu trodimenzionalnih problema. Osnovni trodimenzionalni konačni elementi su **tetraedar**, **pravilni paralelepiped (heksaedar)** i **izoparametarski trodimenzionalni elementi**.
- Ako se geometrija može preslikati (simetrični i pravilni modeli), tada je poželjna heksaedarska ili tetraedarska mreža. Za sve nepravilne oblike koristi se tetra mreža.
- **Praktični primeri:** Industrijski ventili, delovi mašina alatki, kućišta, blok motora, klipnjače, itd.

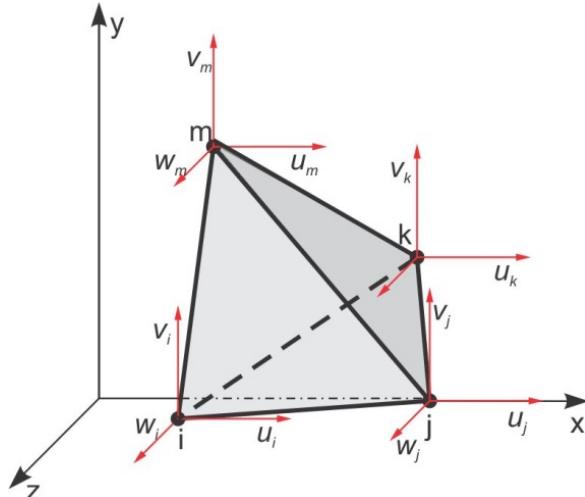




Tipovi konačnih elemenata

4. 3D konačni elementi oblika tetraedra

- Konačni elemnet oblika tetraedra ima četiri čvora (i, j, k, m) i tri stepena slobode u svakom čvoru.



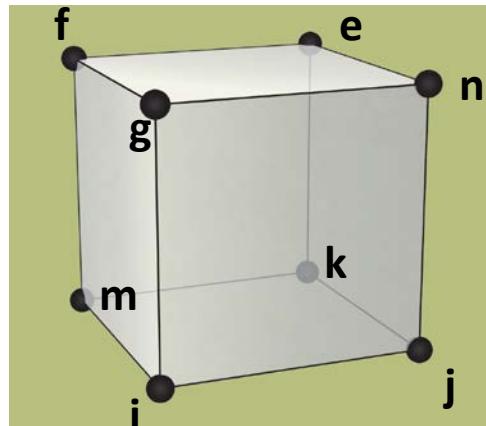
$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{ik} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jk} & k_{jm} \\ k_{ki} & k_{kj} & k_{kk} & k_{km} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mk} & k_{mm} \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$



Tipovi konačnih elemenata

4. 3D konačni elementi oblika paralopipeda

- Konačni elemnet oblika tetraedra ima osam čvora (i, j, k, m, n, e, f, g) i tri stepena slobode u svakom čvoru.



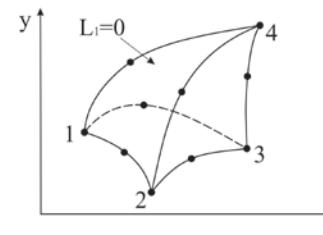
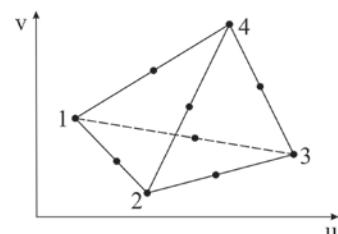
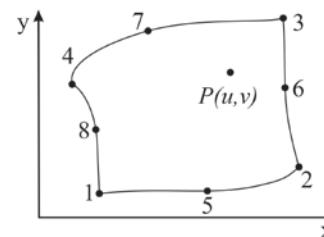
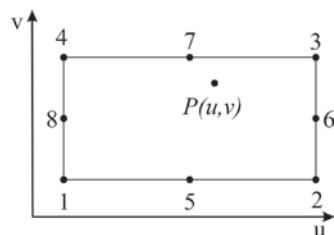
$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & \dots & k_{ig} \\ k_{ji} & k_{jj} & \dots & k_{jg} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ k_{gi} & k_{gj} & \dots & k_{gg} \end{bmatrix}_{24 \times 24}$$



Tipovi konačnih elemenata

5. Izoparametarski konačni elementi

- Konačne elemente osnovnih geometrijskih oblika moguće je preslikati, iz lokalnog koordinatnog sistema u različite nepravilne geometrijske oblike s ravnim ili zakrivljenim stranicama u opštem Dekartovom koordinatnom sistemu.
- Ako je polje pomaka konačnog elementa opisano pomoću istih interpolacijskih funkcija kao i geometrija elementa, elementi se nazivaju **izoparametarski konačni elementi**.



Osnovni konačni elementi

Izoparametarski konačni elementi

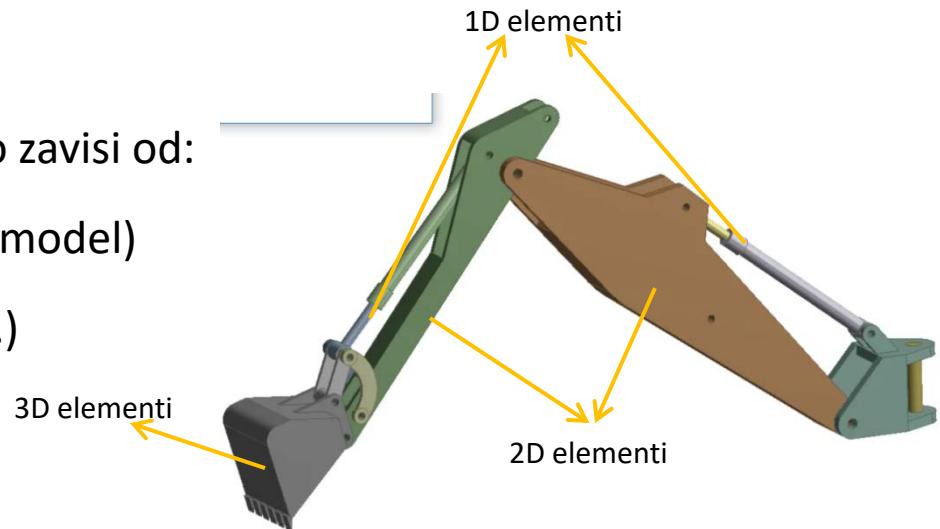


Tipovi konačnih elemenata

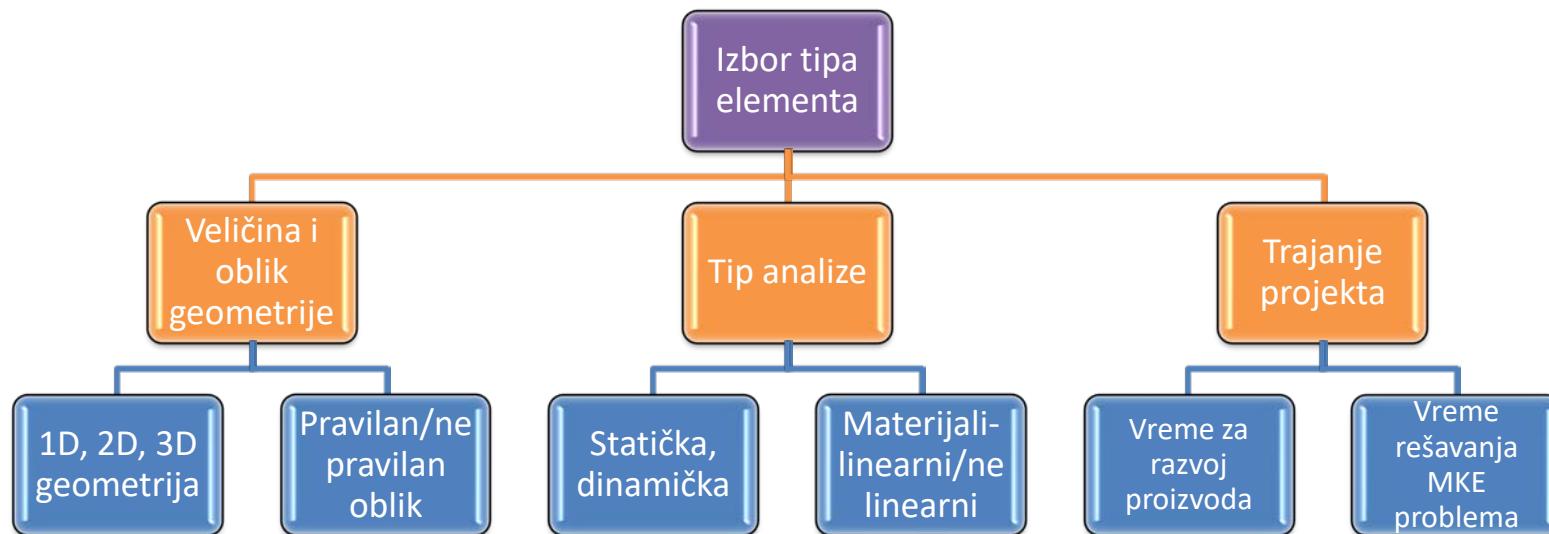
6. Izbor elementa za analizu

☐ Izbor tipa konačnog elementa prvenstveno zavisi od:

- Geometrijskog modela (1D, 2D ili 3D model)
- Tipa analize (strukturalna, toplotna itd.)
- Vremena potrebnog za analizu



☐ Tačnost analize direktno zavisi od izabranog tipa konačnog elementa.





6. Izbor elementa za analizu

- Izbor konačnog elementa za modeliranje, zavisi od geometrijske forme posmatranog kontinuma i procene unutrašnje distribucije sila i deformacija.
- Geometrijska forma je zadata konceptom konstrukcije i sadržana je na projektnoj dokumentaciji.
- Forme dugačkih članova (malih dimenzija poprečnog preseka u odnosu na dužinu) zamenjuju se jednodimenzionim konačnim elementima.
- Ravne površine zidova, pregrada, dijafragmi, lamela nosača, zamenjuju se dvodimenzionim konačnim elementima (obično za analizu napona).
- Tamo gde se javljaju koncentrisana lokalna naprezanja usled geometrijske složenosti, koriste se trodimenzionalni konačni elementi.

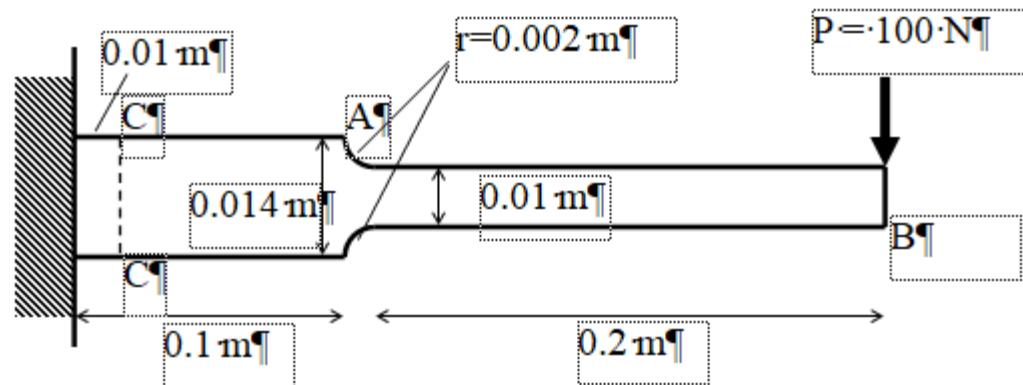
Tipovi konačnih elemenata



7. Primer

Konzolna greda konstantne debljine 5 mm i promenljive visine učvršćena je na levom kraju i opterećena koncentrisanom silom $P = 100 \text{ N}$. Dimenzije su date na slici. Modul elastičnosti $E = 210 \text{ GPa}$, a Poissonov koeficijent V je 0,3.

- Odrediti vertikalna pomeranje na slobodnom kraju B, najveći napon na savijanja oko ramena A i raspodjelu napona na savijanje i smicanja duž vertikalne linije C-C (0,01 m od tog fiksnog kraja).
- Prethodno odrediti preko 1D, 2D i 3D modela

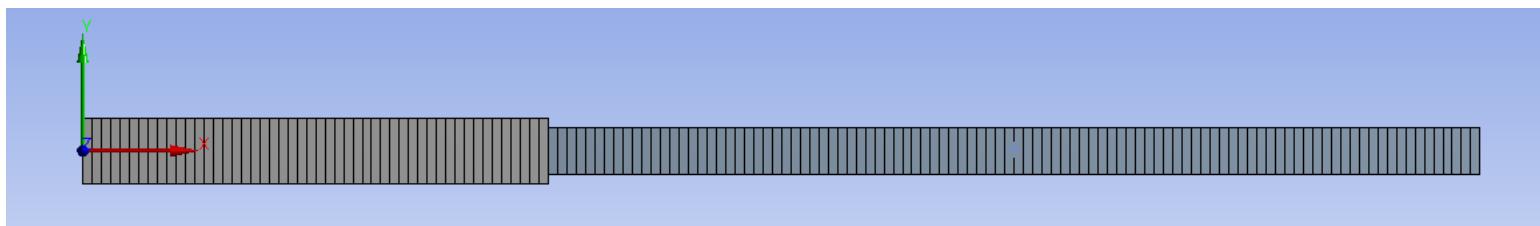
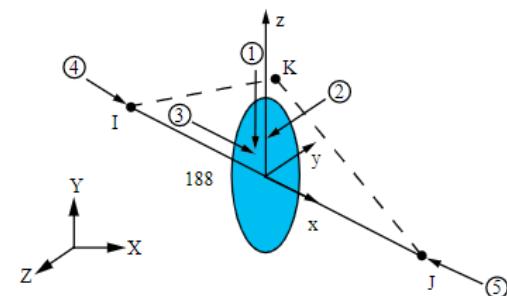


Tipovi konačnih elemenata



7. Primer – 1D element

- Konačni element: tipa grede BEAM 188
- Koristi se za analizu vitkih do umerno debelih grednih struktura. Element se zasniva na Timošenkovojo teoriji grede, koja uključuje deformacija smicanja.
- Element može biti opisan linearnom, kvadratnom i kubnom funkcijom. Ima dva čvora i po šest stepeni slobode u svakom čvoru (tri translacije i tri rotacije).

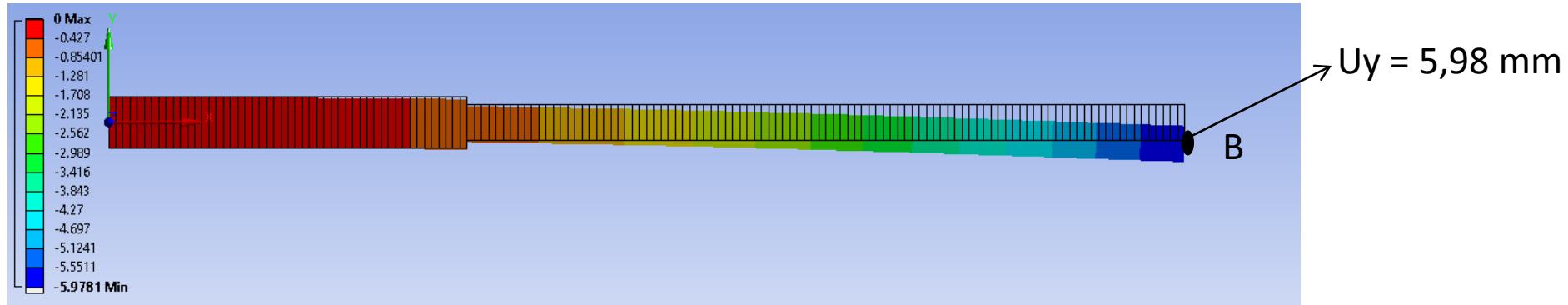


Tipovi konačnih elemenata

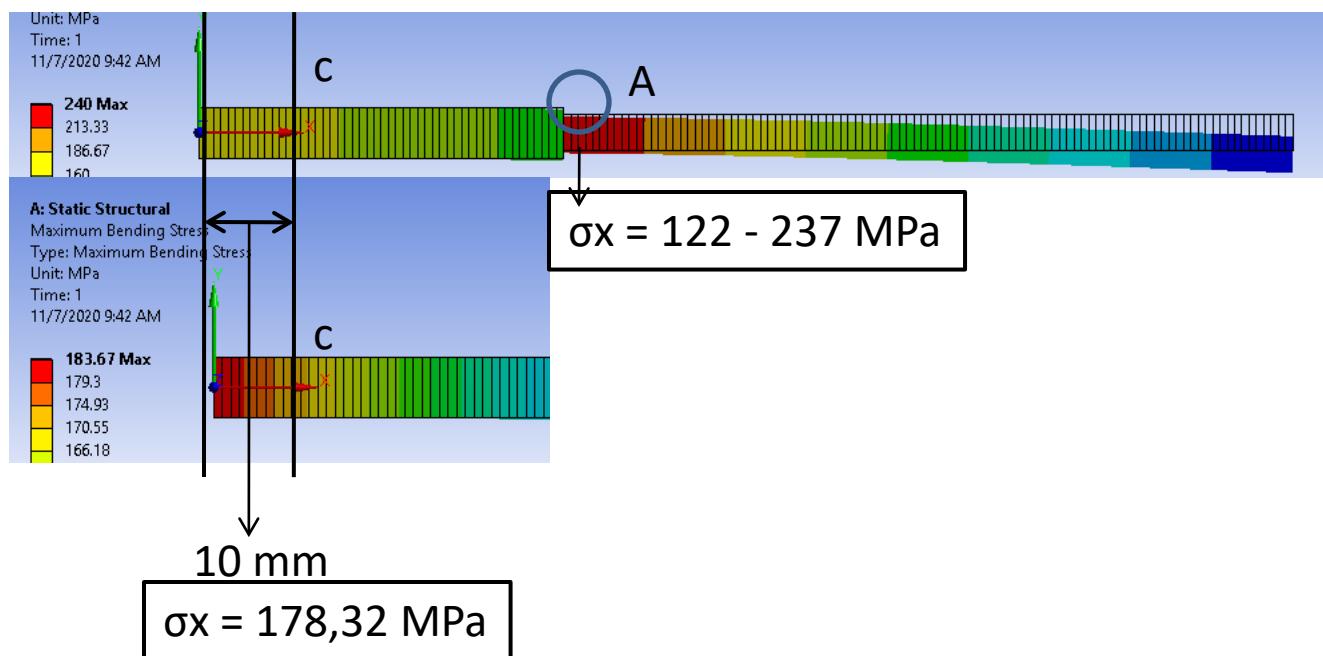


7. Primer - 1D element

Pomeranje



Napon na savijanje

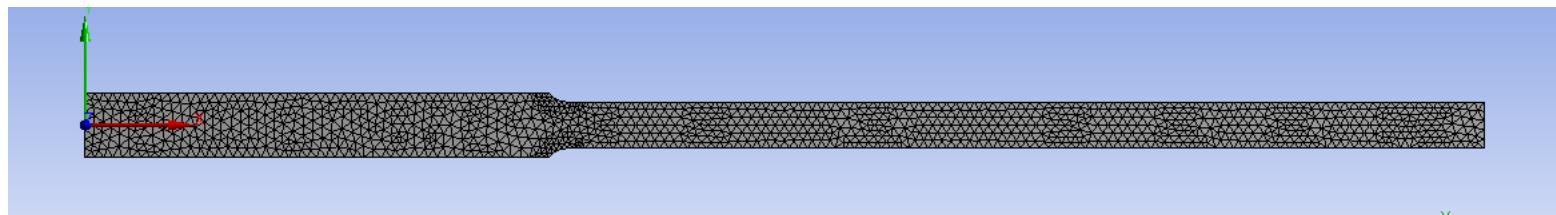
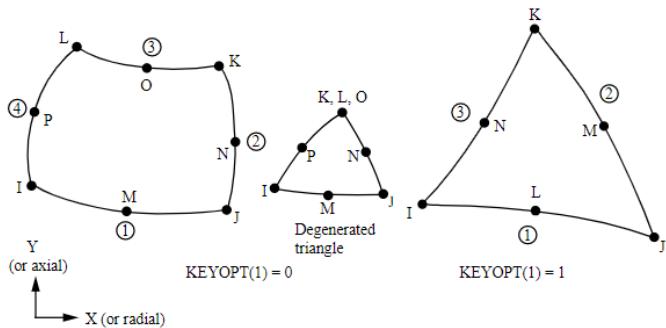


Tipovi konačnih elemenata



7. Primer – 2D element

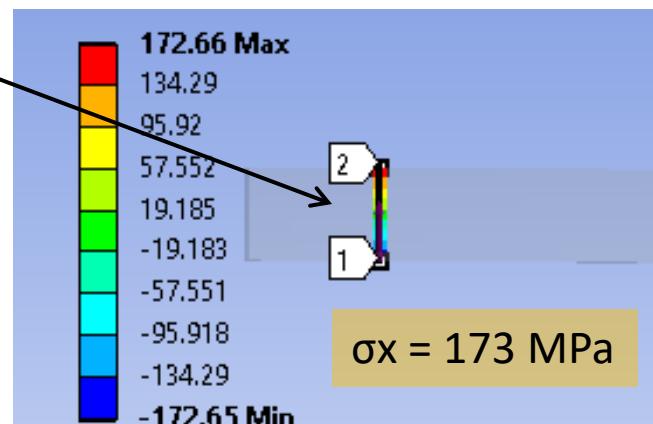
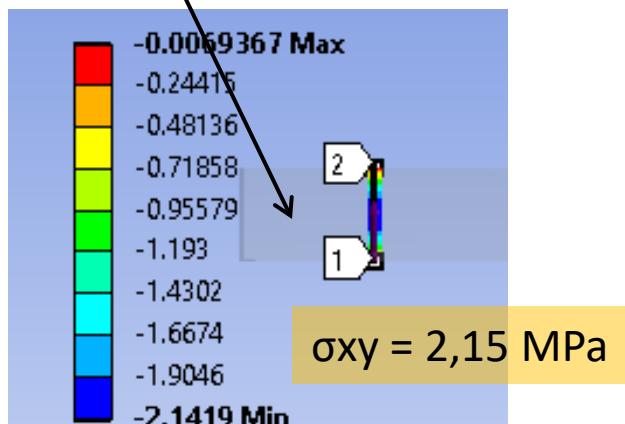
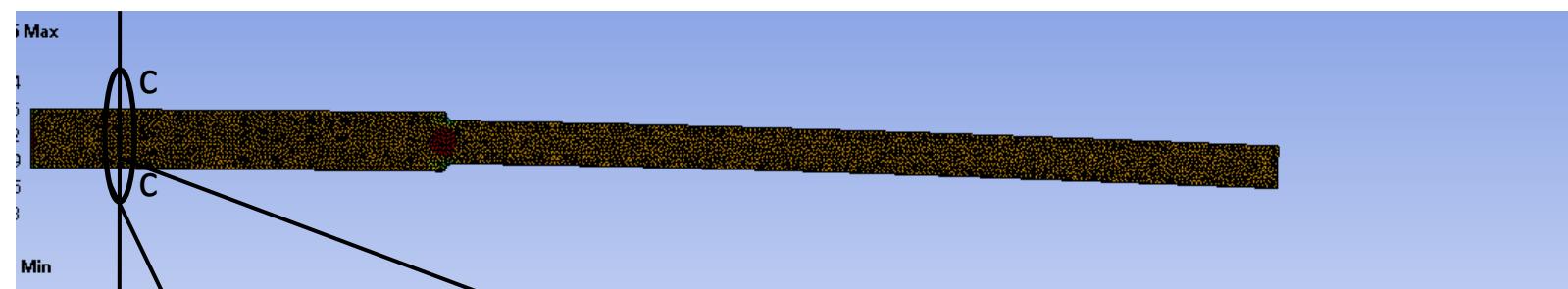
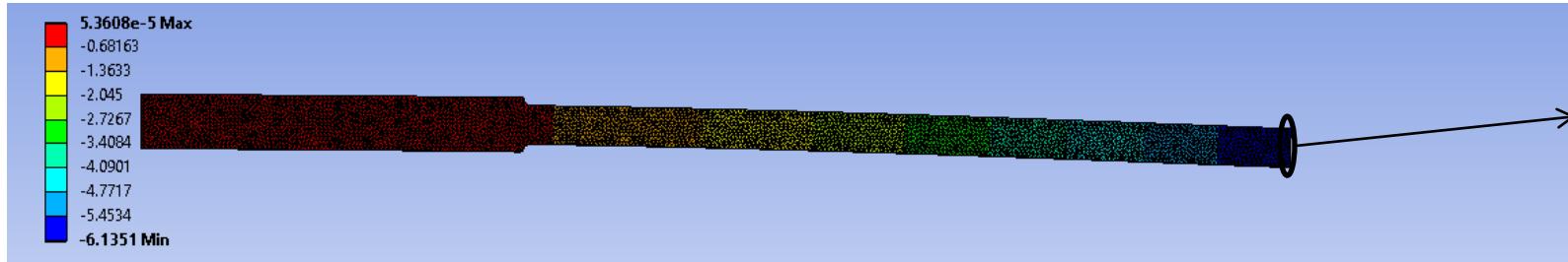
- Konačni element: ravanski element plane 183
- Plane 183 je 2D element višeg reda sa osam ili šest čvorova. Interpolaciona funkcija je kvadratnog oblika i pogodan je za meširanje nepravilnih mreža.
- U svakom čvoru ima po dva stepena slobode (translacija u X i Y pravcu). Može se koristiti za određivanje ravanskog stanja napon, ravanskog stanja deformacija ili kao osno-simetrični element (sa ili bez uvijanja).



Tipovi konačnih elemenata



7. Primer - 2D element



Napon smicanja duž preseka C-C

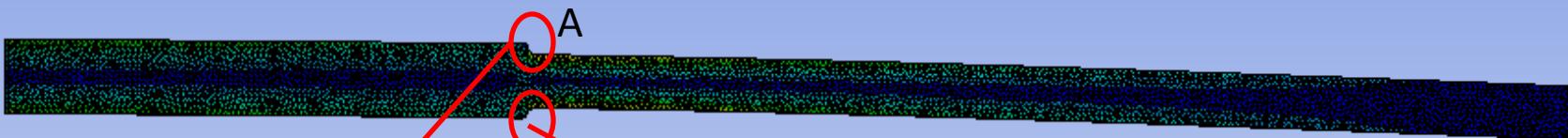
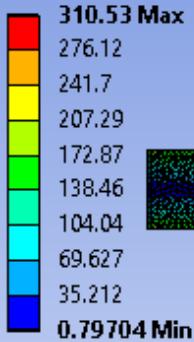
Normalni napon duž preseka C-C

Tipovi konačnih elemenata

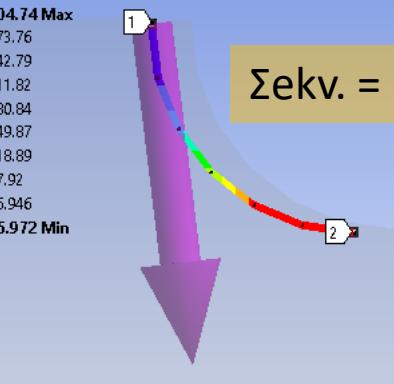


7. Primer – 2D element

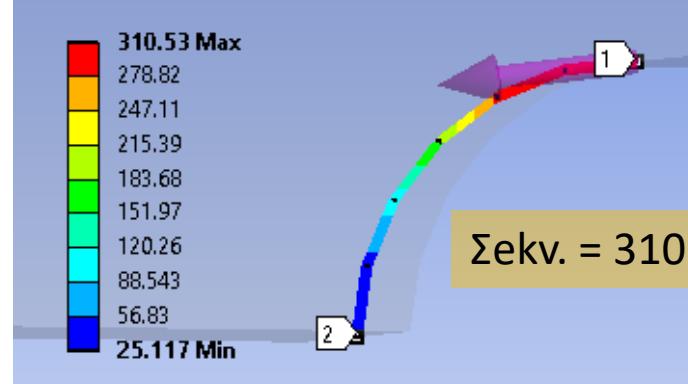
Ekvivalentni Misses-ovi naponi



A



$$\Sigma \text{ekv.} = 305 \text{ MPa}$$



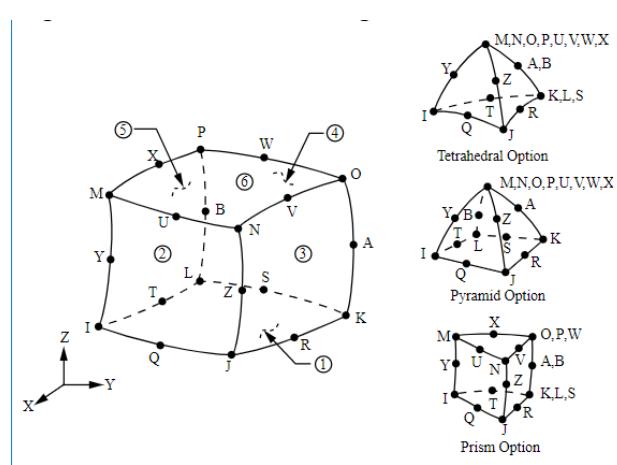
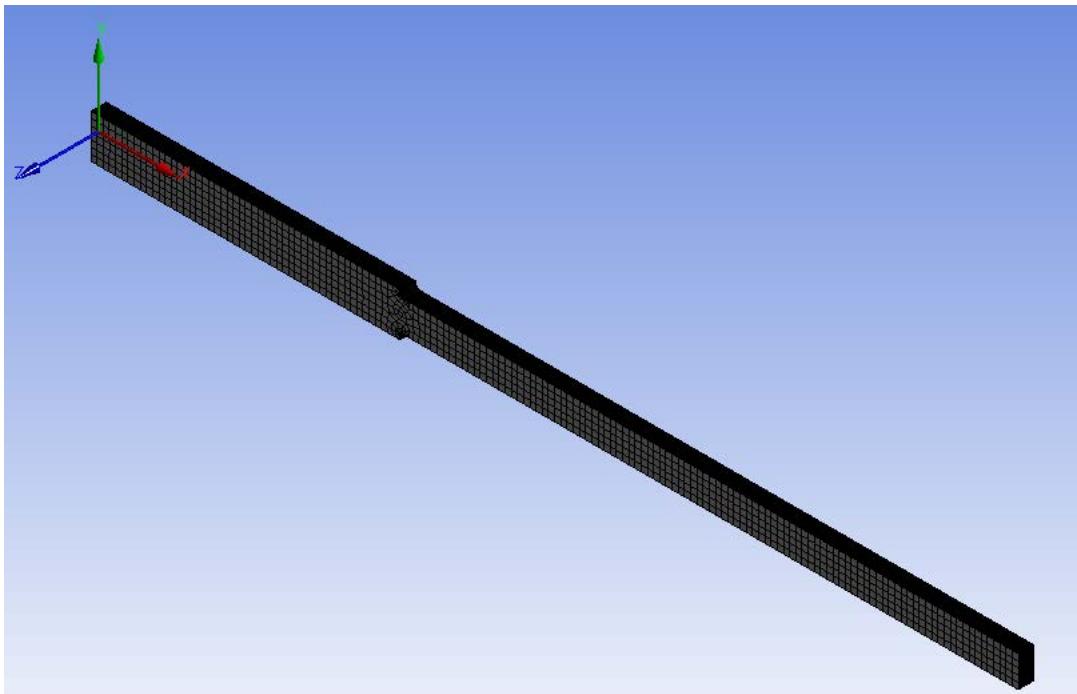
$$\Sigma \text{ekv.} = 310 \text{ MPa}$$

Tipovi konačnih elemenata



7. Primer – 3D element

- Konačni element: zapreminski element solid 183
- Solid 183 je 3D element sa interpolaciona funkcija kvadratnog oblika.
- U osnovnoj varijanti element ima 20 čvorova i u svakom po tri stepena slobode (translacijske u X, Y i Z pravcu). Solid 183 se još može koristiti i u obliku piramide (13 čvorova), tetraedra (10 čvorova) i prizme (15 čvorova).
- Element podržava plastičnost, hiperplastičnost, puzanje, veliko ugibanje i mogućnosti velikog naprezanja.

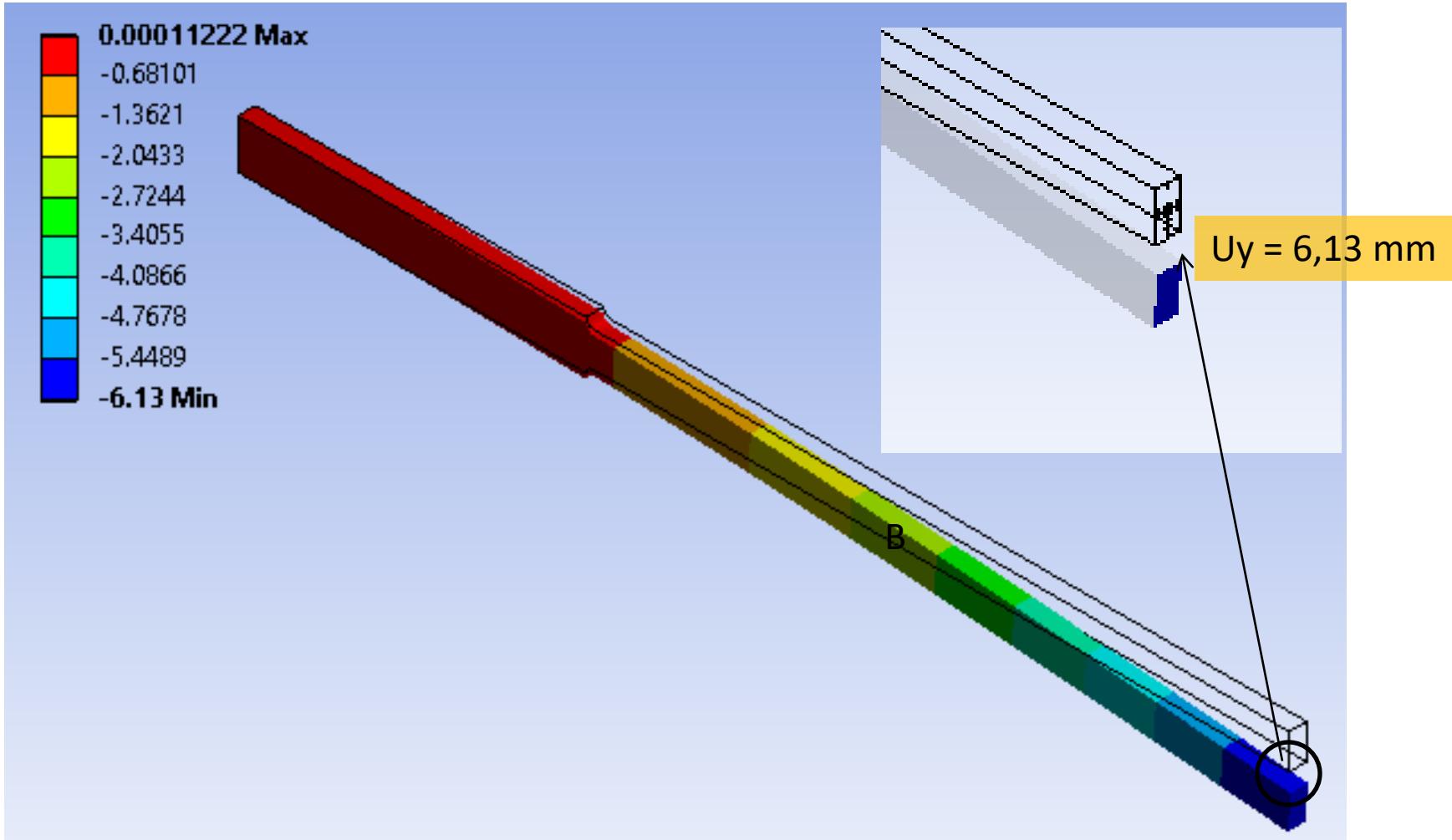


Tipovi konačnih elemenata



7. Primer – 3D element

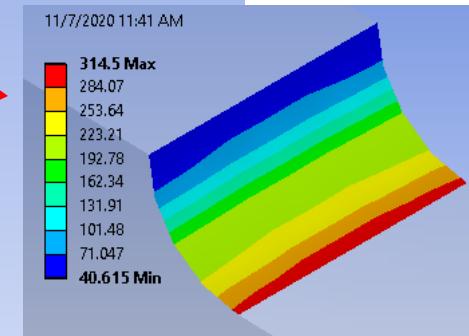
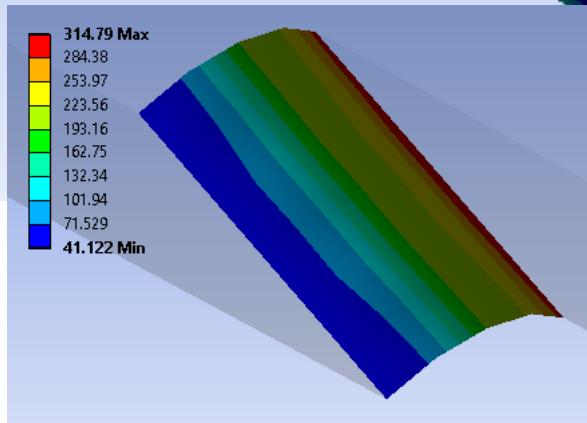
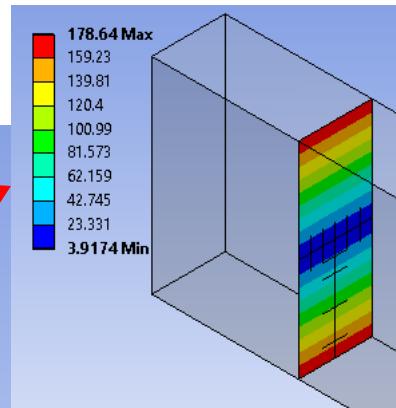
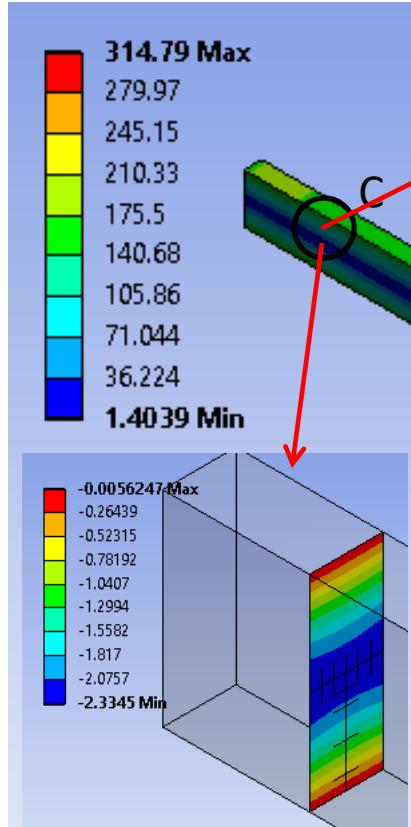
Pomeranje u pravcu dejstva sile



Tipovi konačnih elemenata



7. Primer – 3D element



Tipovi konačnih elemenata



7. Primer – Kastiljanova teorema

Moment u funkciji X koordinate:

$$M = -P(L - x)$$

Moment inercije se menja sa promenom x-koordinate pa će pomeranje tačke B biti:

$$\begin{aligned} u_{yB} &= \int_0^{0.1} \frac{M(\partial M / \partial P)}{EI_1} dx + \int_{0.1}^{0.302} \frac{M(\partial M / \partial P)}{EI_2} dx \\ &= \int_0^{0.1} \frac{-P(L-x)(-(L-x))}{E(h_1^3 b / 12)} dx + \int_{0.1}^{0.302} \frac{-P(L-x)(-(L-x))}{E(h_2^3 b / 12)} dx \\ &= \frac{P}{E(h_1^3 b / 12)} \left[L^2 x - Lx^2 + x^3 / 3 \right]_0^{0.1} + \frac{P}{E(h_2^3 b / 12)} \left[L^2 x - Lx^2 + x^3 / 3 \right]_{0.1}^{0.302} \\ &= 0.00582 = 5,82 \text{ [mm]} \end{aligned}$$

Maksimalni napon duž Y ose u preseku C-C:

$$\sigma_{\max} = \frac{M(h_1 / 2)}{EI_1} = \frac{M(h_1 / 2)}{E(h_1^3 b / 12)} = \frac{P(0.302 - 0.01)h_1 / 2}{E(h_1^3 b / 12)} = 178.8 \text{ MPa}$$

Napon smicanja u preseku C-C:

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A} = \frac{3 * 100N}{2 * (h_1 * b)} = \frac{3 * 100}{2 * 0.014 * 0.005} \cdot 10^{-6} = 2.14 \text{ MPa}$$

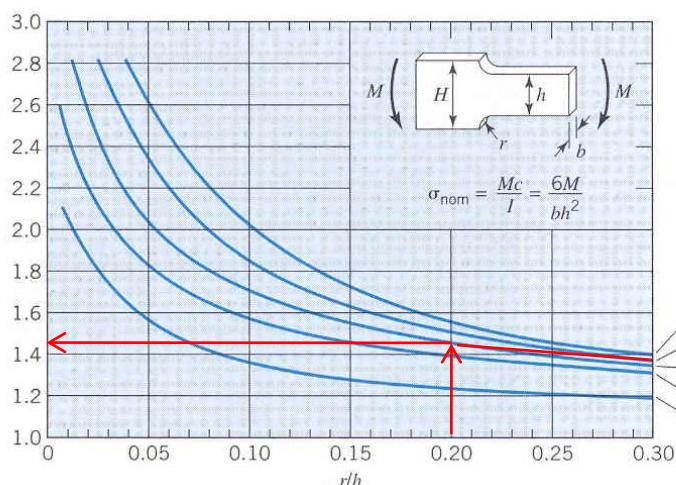
Tipovi konačnih elemenata



7. Primer - Poređenje rezultata

| | Kastiljanova teorema | 1D element | 2D element | 3D element |
|-----------------------------------|----------------------|------------|------------|------------|
| Pomeranja tačke B Uy [mm] | 5,84 | 5,98 | 6,13 | 6,13 |
| Normalni naponi u preseku C [MPa] | 178,8 | 178,32 | 173 | 178,64 |
| Normalni naponi na ramenu B [MPa] | - | 237 | 310 | 314 |
| Naponi smicanja u preseku C [MPa] | 2,14 | - | 2,15 | 2,33 |

Koeficijent koncentracije napona za tačku A



$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{M(h_2/2)}{EI_2} = \frac{M(h_2/2)}{E(h_2^3 b/12)} = \frac{6M}{Eh_2^2 b} = \frac{6 * 100 * (0.302 - 0.102)}{210e9 * 0.01^2 * 0.005} = 240.0 \text{ MPa}$$

$$K_t = \frac{(\sigma_x)_{\text{max}}}{\sigma_{\text{nom}}} = \frac{237}{240} = 0,98 \text{ - 1D element}$$

$$K_t = \frac{(\sigma_x)_{\text{max}}}{\sigma_{\text{nom}}} = \frac{310}{240} = 1,29 \text{ - 2D element}$$

$$K_t = \frac{(\sigma_x)_{\text{max}}}{\sigma_{\text{nom}}} = \frac{314}{240} = 1,30 \text{ - 3D element}$$

Za $H/h = 1,4$ i $r/h = 0,2$
sa dijagrama $K_t \approx 1,45$