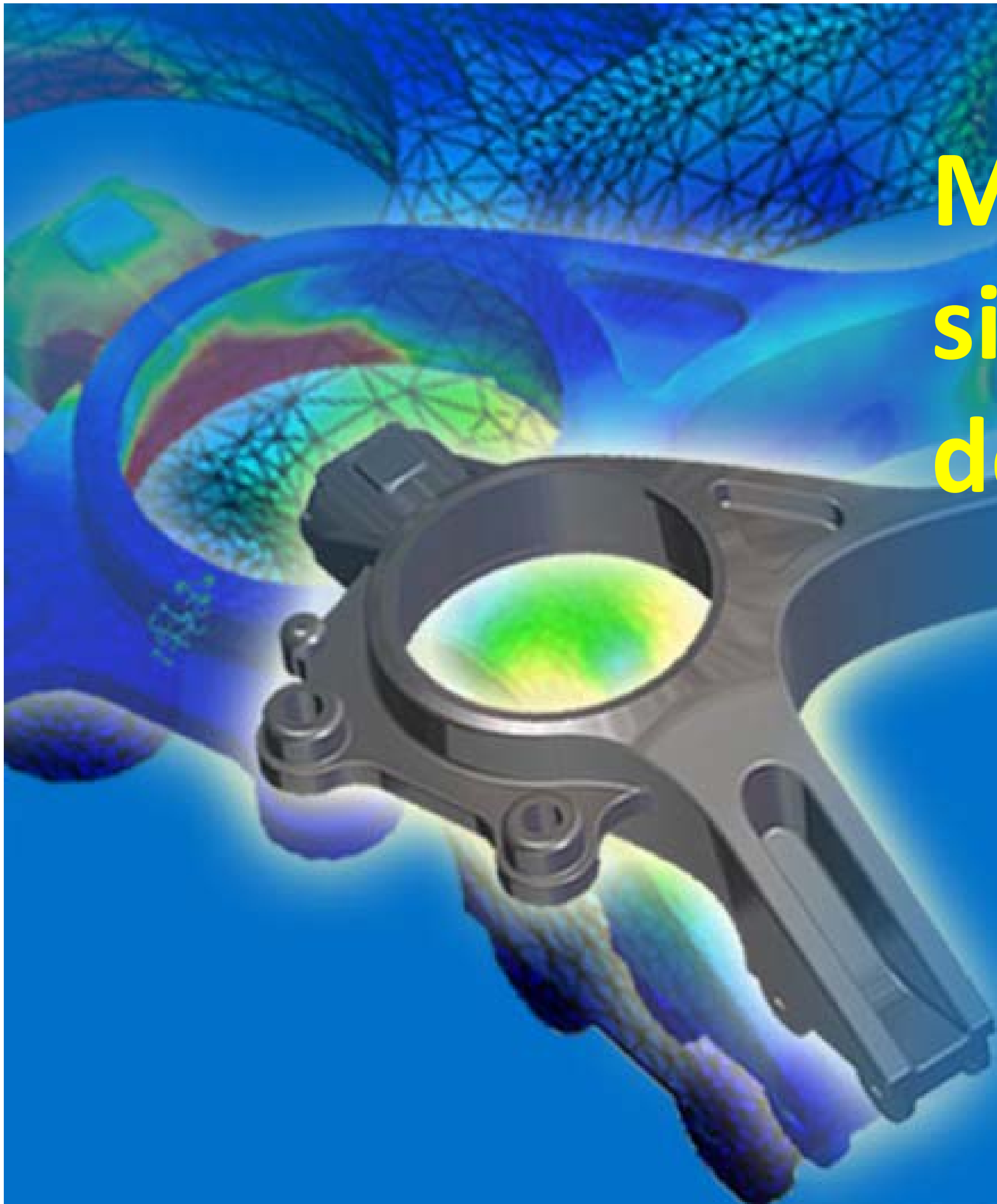


Modelovanje i simulacija procesa deformisanja

Nastavnik:
V. Prof. dr Mladomir Milutinović

Asistent:
Doc. Dejan Movrin

MATEMATIČKO MODELOVANJE PROCESA DEFORMISANJA

Matematičko modelovanje procesa deformisanja je postupak matematičkog opisivanja procesa deformisanja. Sa jedne strane, ovaj opis mora biti relativno jednostavan, a sa druge strane i dovoljno tačan, da bi odgovorio svojoj nameni koja je definisana od strane kreatora modela.
Matematički model se obično sastoji od skupa jednačina kojima treba da su opisane sve važnije pojave ili procesi značajni za postavljeni problem. Karakteristike sredine ili objekata izražene su kroz koeficijente jednačina.
Za nalaženje rešenja formulisanog modela matematickim metodama koriste se kako ***determinističke (analitičke i numeričke)*** tako i ***heurističke metode i veštačka inteligencija.***

Klasična (analitička) matematika - osnovni cilj utvrditi pod kojim uslovima postoji rešenje nekog zadatka i koje su osobine tog rešenja.
Numeričke matematika - efektivno nalaženje rešenja sa zadatom tačnošću. Ta tačnost treba da bude nešto veća od tačnosti koju obezbeđuje matematički model, ali ne ni suviše visoka, jer se tačnost približnog rešenja i tako neće povećati s obzirom na usvojeni model.
Heurističke metode i metode „veštačke inteligencije“ - se koriste kako bi se ubrzao proces pronalaženja dovoljno dobrog rešenja, u situacijama kada je kompletno pretraživanje nepraktično. Tehnike rešavanja problema, učenja i otkrivanja koji su bazirani na iskustvu.

FORMIRANJE MATEMATIČKOG MODELA

Fizički model (realna konstrukcija)

Idealizacija
- Geometrija
- Materijal
- Opterećenje
- Granični uslovi
- Kinematika

Pitanja
- Koji su najvažniji fizički fenomeni?
- Da li problem zavisi od vremena?
- Da li je problem linearan ili nelinearan?
- Koje rezultate želimo da dobijemo?
- Tačnost rezultata?

Matematički model
Diferencijalne jednačine
+
granični uslovi

Da li možemo da rešimo matematički model **analitički**?

MATEMATIČKO MODELOVANJE PROCESA DEFORMISANJA

Analitičke metode

- Metoda ravnih preseka (inženjerska metoda)
- Metoda linija klizanja
- Metoda vizioplastičnosti (teorija+exp.)
- Metoda gornje granice
- Varijaciona metoda
- Metoda deformacionog rada

Heurističke metode i metode veštačke inteligencije

- Ekspertni sistemi
- Soft computing
- Monte Carlo
- Genetski algoritam
- Evoluciono programiranje
- Neuronske mreže
- Fuzzy logic
- Simulirano kaljenje
- Tabu algoritam i dr.

Numeričke metode

- UBET
- MUBET
- Metoda Konačnih Elemenata
- Metoda Konačnih Zapremina
- Metoda Konačnih Razlika
- Metoda Graničnih Elemenata
- Metoda reziduuma

Metode strukturne analize

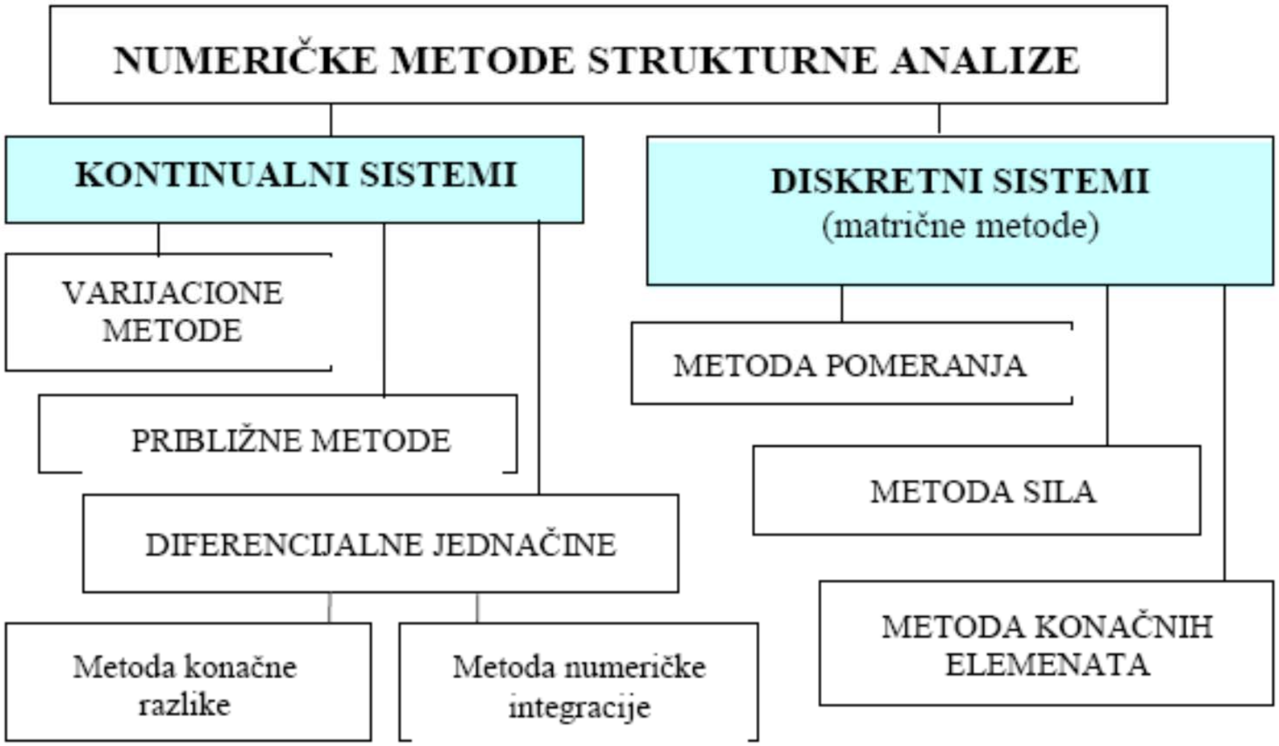
Analiticke metode:

- diferencijalne jednačine (obične i parcijalne)
- diferencijlno-integralne jednačine

Numericke metode

- kontinualni sistemi
- diskretni sistemi

Numeričke metode

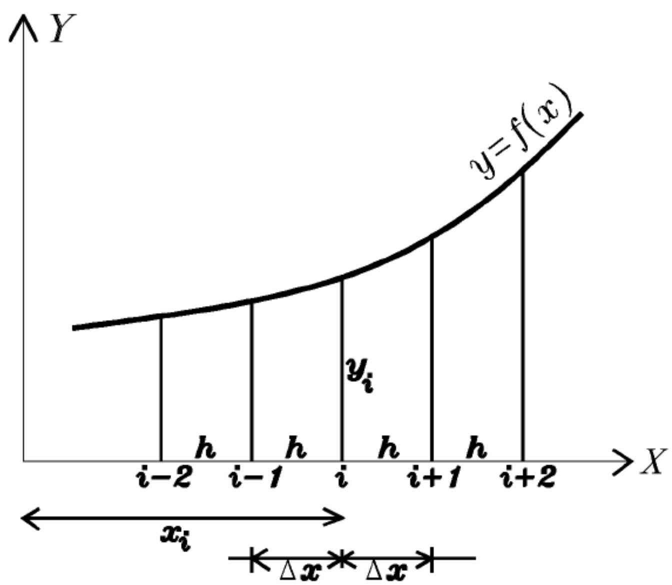


U numeričkom pristupu rešavanja pojedinih tehničkih problema najčešće se koristite neke od sledećih **numeričkih metoda:**

- **Metoda konačnih razlika (Finite Diferences Method)** predstavlja numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina na taj način što se prirast *df* funkcije *f(x)* zameni konačnom razlikom (diferencijom) *Δf* funkcije *f(x)*.
- **Metoda graničnih elemenata (Boundary Element Method)** alternativna je metodi konačnih elemenata uz neke njoj specifične karakteristike: mali broj jednačina sistema, jednostavna priprema i obrada podataka, dobra aproksimacija koncentracije naprezanja, itd.
- **Metoda konačnih zapremina (Finite Volume Method)** alternativna je metodi konačnih elemenata za analizu naprezanja i deformacija, kako čvrstih tela, tako i termoplastičnih.
- **Direktna metoda konačnih elemenata** (Direct Finite Element Method) koristi se za rešavanje relativno jednostavnih problema, npr. mašinski elementi jednostavnog oblika, statika linijskih konstrukcija i slično. Zato je ova metoda polazna osnova za širu inteipretaciju MKE, zbog svoje jednostavnosti i fizičkog značenja.
- **Varijaciona metoda konačnih elemenata** (Variational Finite Element Method) temelji se na varijacijskom principu virtualnih pomeranja i principu virtualnih naprezanja. Varijacijska metoda se jednako uspešno primenjuje za jednostavne i složene probleme. Kod postavljanja matričnih jednačina konačnog elementa više se primjenjuje varijacijska metoda nego direktna.
- **Metoda energetskog bilansa** (Energy Balance Finite Element Method) temelji se na bilansu različitih vidova energije, zbog čega ima širu primenu u termostatičkoj i termodinamičkoj analizi kontinuuma.
- **Metoda reziduuma-ostatka** (Residual Finite Element Method) temelji se na diferencijalnim jednačinama razmatranog problema. Naročitu primenu ima kod problema gde je teško formulisati funkcional ili kod problema gde funkcional ne postoji

METODA KONAČNIH RAZLIKA je numerička metoda pogodna za rešavanje raznovrsnih zadataka. Bazira se na matematičkoj diskretizaciji diferencijalnih jednačina prevodjenjem na jednačine sa konačnim razlikama. Uspešno se može primeniti na tankozidim nosačima, na problemima plastično deformabilnih konstrukcija. Efikasnost metode se smanjuje sa složenošću unutrašnjih veza posmatranog mehaničkog sistema.

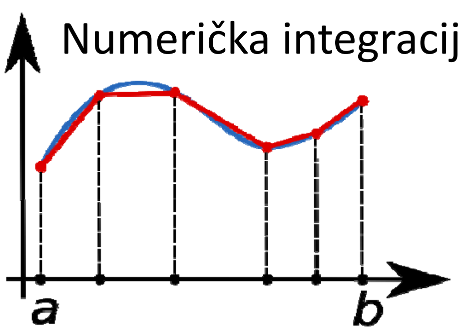
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) - \left(\frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$$



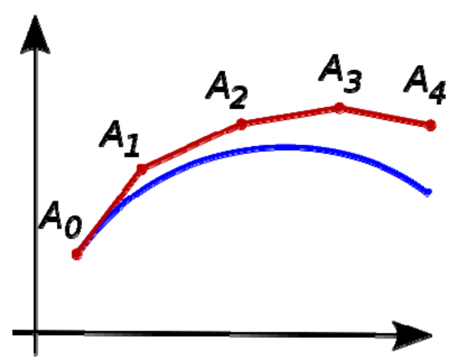
Ukoliko Δx dovoljno smanjimo, numerička aproksimacija derivacije će biti vrlo točna

- **METODA NUMERIČKOG INTEGRISANJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA** se koristi široko u mnogim zadacima. Metoda se svodi na rešavanje zadatka *Cauchy*-ja s obzirom na postojanje dobrih matematičkih procedura za integraciju sistema diferencijalnih jednačina. Za rešavanje se dosta dobro mogu upotrebiti metoda *Euler*-a, metoda *Runge-Kutta* i druge.

Eulerova metoda je iterativna metoda kojom se računa aproksimacija vrednosti $y(x_1)$ uz poznatu (običnu) diferencijalnu jednačinu oblika **y'=f(x,y)** i početni uslov $\mathbf{y(x_0)=y_0}$ (tzv "*Cauchyjev problem*").
Metoda se provodi tako da se početni interval, $[x_0,x_1]$ (dakle, interval od tačke koja je zadana početnim uslovom, do tačke u kojoj želimo izračunati vrednost funkcije) podeli na *n* jednakih delova.
Dužinu $h=(x_{1,0})/n$ zovemo *korakom* metode. Zadanom diferencijalnom jednačinom oblika $y'=f(x,y)$ dato je tzv. *polje smerova*, odnosno, svakoj tački ravni pomoću diferencijalne jednačine možemo pridružiti vrednost nagiba tangente. Upravo će nam tangenta u svakoj tački predstavljati linearnu aproksimaciju rešenja diferencijalne jednačine. Pomeranjem za vrednost koraka *h* po *x*-osi dolazimo do sledeće tačke iterativne metode (na slici označene redom s A_0, A_1, ...). Postupak ponavljamo (iteriramo) dok vrednost na *x*-osi ne dosegne x_1. Provedemo li računski opisan postupak dobivamo iterativni algoritam.



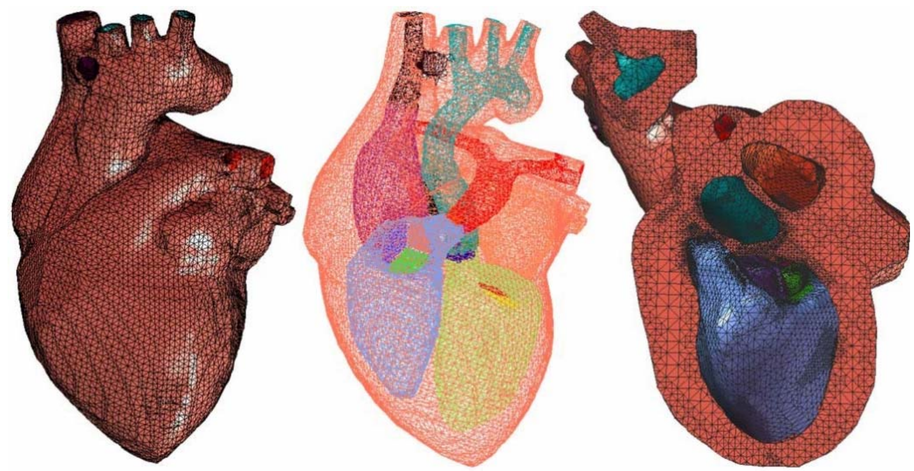
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\cdot(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n)$$

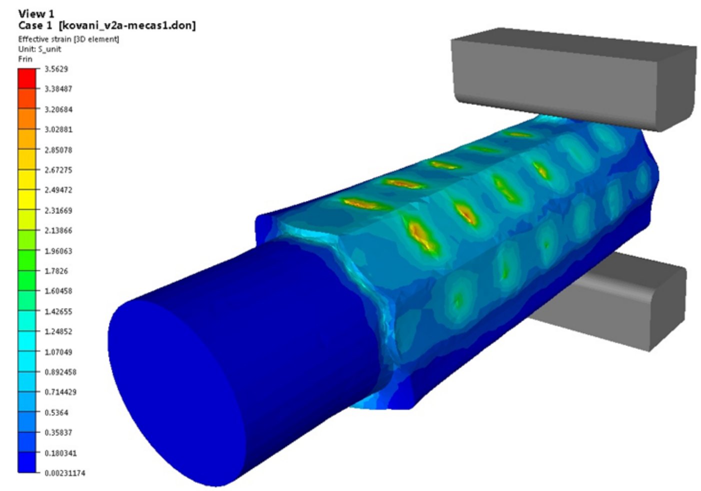


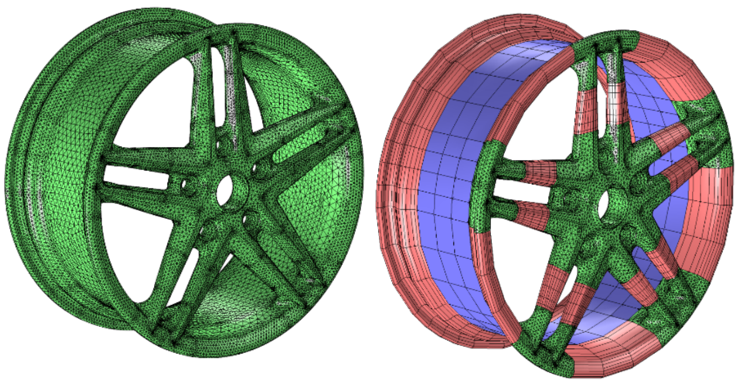
$$x_{i+1}=x_i+h$$
$$y_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i,y_i)$$

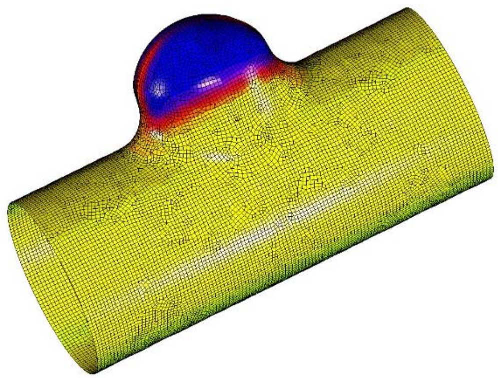
- **METODA GRANIČNIH ELEMENATA** je specifična metoda prelaza iz sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina i zadatih graničnih uslova ka njihovoj integralnoj analogiji na granici oblasti koju posmatramo. Postupak se sastoji u diskretizovanju granične oblasti strukture graničnim elementima, primenom različitih vrsta aproksimacija geometrije granica i graničnih funkcija. Iz integralnih odnosa, diskretnom analogijom, formira se sistem algebarskih jednačina. Rešavanjem sistema dolazi se do traženih veličina na granicama oblasti.

METODA KONAČNIH ELEMENATA









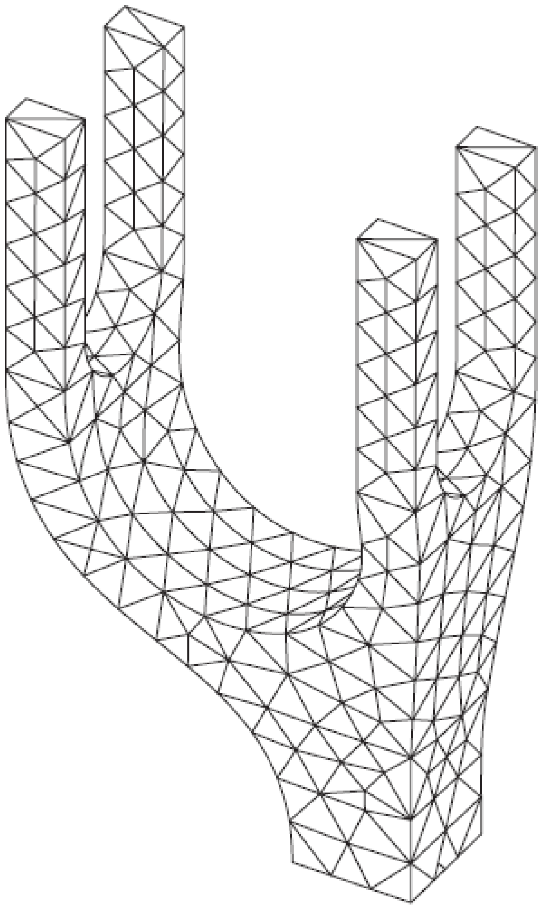
MKE - Osnove

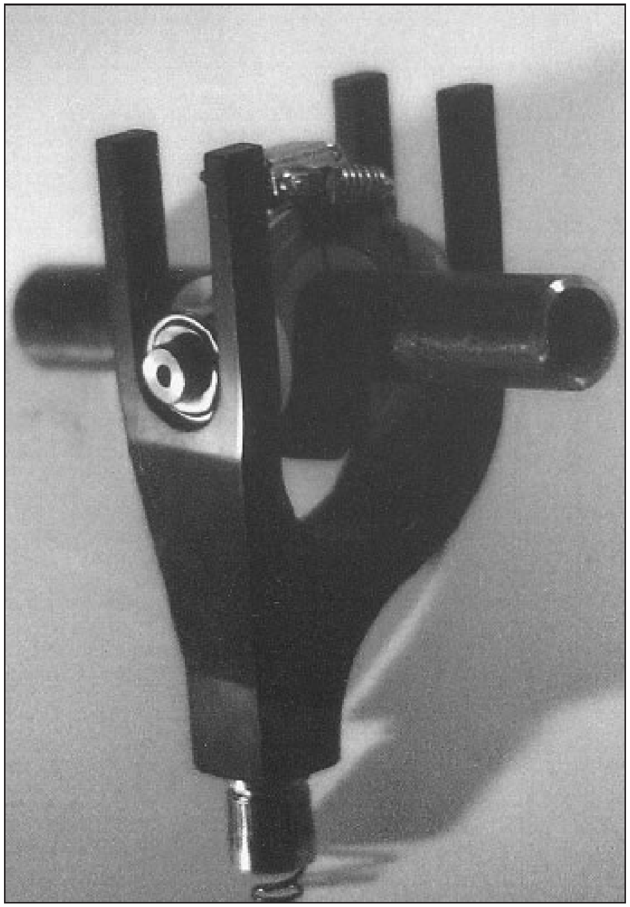
- Metoda konačnih elemenata spada u metode diskretne analize. Za razliku od većinenumeričkih metoda koje se zasnivaju na matematičkoj diskretizaciji jednačina graničnih problema, MKE se zasniva na fizičkoj diskretizaciji razmatranog područja. Umesto elementa diferencijalno malih dimenzija, osnovu za sva proučavanja predstavlja deo područja konačnih dimenzija, manje područje ili **konačni element**. Zbog toga su osnovne jednačine pomoću kojih se opisuje stanje u pojedinim elementima, a pomoću kojih se formuliše i problem u celini, umesto diferencijalnih ili integralnih, **obične algebarske.**
- **Područje analize → Područje algebre**
- Sa stajališta fizičke interpretacije, to znači da se razmatrano područje, kao kontinuum sa beskonačno mnogo stepeni slobode, zamenjuje diskretnim modelom međusobno povezanih konačnih elemenata, sa **konačnim brojem stepeni slobode**. S obzirom na to da je broj diskretnih modela za jedan granični problem neograničeno veliki, osnovni zadatak je da se izabere onaj model koji najbolje aproksimira odgovarajući granični problem.

MKE - Osnove

- MKE je najviše primenjivan numericki postupak za približno rešavanje graničnih i početnih problema
- Metoda konačnih elemenata spada u metode diskretne analize. Za razliku od ostalih numeričkih metoda, koje se zasnivaju na matematičkoj diskretizaciji jednačina graničnih problema, MKE se zasniva na fizičkoj diskretizaciji razmatranog područja. Umesto elementa diferencijalno malih dimenzija, osnovu za sva proučavanja predstavlja deo područja konačnih dimenzija, manje područje ili **konačni element**. Zbog toga su osnovne jednačine pomoću kojih se opisuje stanje u pojedinim elementima, a pomoću kojih se formuliše i problem u celini, umesto diferencijalnih ili integralnih, **obične algebarske.**
- **Područje analize → Područje algebre**
- Sa stajališta fizičke interpretacije, to znači da se razmatrano područje, kao kontinuum sa beskonačno mnogo stepeni slobode, zamenjuje diskretnim modelom međusobno povezanih konačnih elemenata, sa **konačnim brojem stepeni slobode**. S obzirom na to da je broj diskretnih modela za jedan granični problem neograničeno veliki, osnovni zadatak je da se izabere onaj model koji najbolje aproksimira odgovarajući granični problem.

MKE - Osnove





MKE - Osnove

- Konačni elementi su međusobno povezani samo u čvornim tačkama
- Nepoznata veličina unutar konačnog elementa izražava se preko poznatih funkcija raspodele (interpolacione funkcije) unutar elementa i nepoznatih vrednosti funkcije u čvornim tačkama konačnog elementa.
- Obično se svaja jednostavna raspodela nepoznatih, npr. u obliku polinoma (linearnog, kvadratnog ili kubnog). Stvarna raspodela nepoznatih veličina unutar konačnih elemenata je po pravila kompleksnija, pa je zato rešenje dobijeno primenom MKE približno.
- Što je mreža konačnih elemenata kojom se opisuje računski domen problema gušća, to je odstupanje između tačnog i približnog rešenja manje
- Unošenjem nepoznate veličine u svakom konačnom elementu (preko poznatih interpolacionih funkcija unutar elementa i nepoznatih čvornih vrednosti) u diferencijalne jednačine graničnog problema i njihovim međusobnim povezivanjem ("sabiranjem") dolazi se do sistema algebarskih jednačina po čvornim nepoznatim.

MKE - Osnove

Metoda konačnih elemenata (MKE) eng. The Finite Element Method (FEM)
Numerički postupak za približno rešavanje graničnih i početnih problema, odn. običnih ili parcijalnih diferencijalnih jednačina sa datim graničnim i početnim uslovima.

Da li možemo da rešimo ovaj matematički model **analitički**?

TEŠKO!

NUMERIČKI POSTUPAK MKE

Fizički model
(realna konstrukcija)

↓

Matematički model
(Diferencijalne jednačine
+
Granični uslovi)

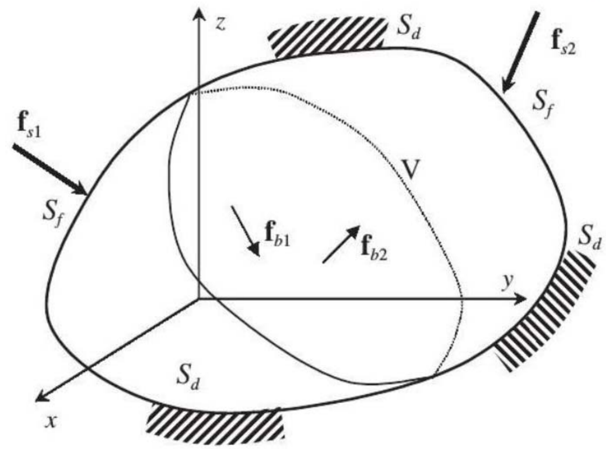
↓

Numerički model
(MKE)

MKE - Osnove

Granični ili početni problem deformabilnog 3D tela

- **Granicni ili početni problem** deformabilnog tela posmatra stanje napona i deformacija tela usled datih spoljašnjih uticaja
- Ukoliko su spoljašnji uticaji značajnije zavisni od vremena, problem je dinamičke prirode i opisan je (načelno) odgovarajucim diferencijalnim jednacinama kretanja
- Ako su vremenske promene opterecenja i odgovora tela zanemarljive, problem je staticke prirode i definisan je odgovarajucim diferencijalnim jednacinama ravnoteže
- Osim diferencijalnih jednačina kretanja ili ravnoteže, moraju da budu definisani i odgovarajuci granicni i pocetni uslovi (za dinamicki problem)



  - Na primer, može da se traži raspodela temperature, ili intenziteta magnetnog polja unutar neke oblasti, ili raspodela pomeranja i sila u preseku u linijskom nosaču, ugiba u ploči i sl.
  - U matematičkom smislu, takvi problemi se definišu diferencijalnim jednačinama ili u obliku integralne formulacije.
  - Obe matematičke formulacije problema mogu da budu osnov za (približnu) numeričku formulaciju primenom MKE

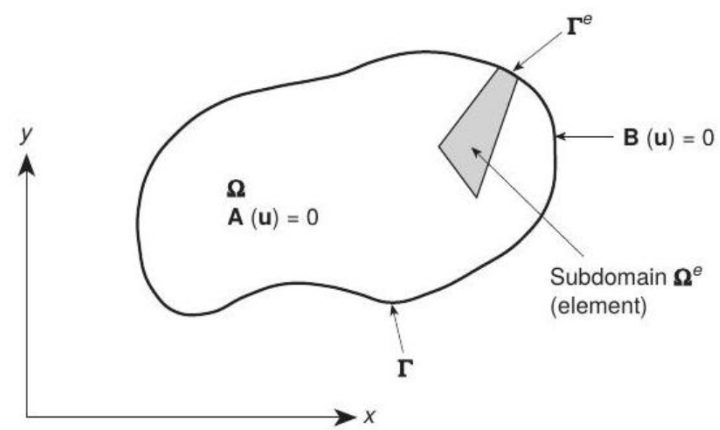
MKE - Osnove

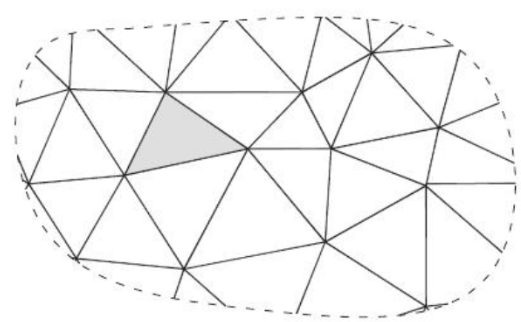
Diskretizacija domena i diferencijalnih jednacina

Posmatrani problem Primenjene mehanike (Mehanike čvrstog tela) definisan je odgovarajucim granicnim problemom, što znaci da je poznato sledece:

- domen definisanosti problema Ω i granica domena Γ
- diferencijalne jednacine problema u oblasti Ω: *A(u) = 0*
- zadati granicni uslovi na konturi domena Γ: **B(u) = 0**

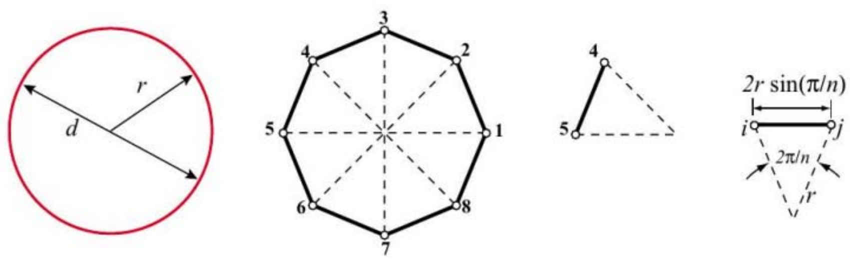
Domen definisanosti problema (1D, 2D ili 3D) prikazan je u Dekartovim koordinatama x i osnovna nepoznata velicina je pomeranje tačaka čvrstog tela *u(x)*





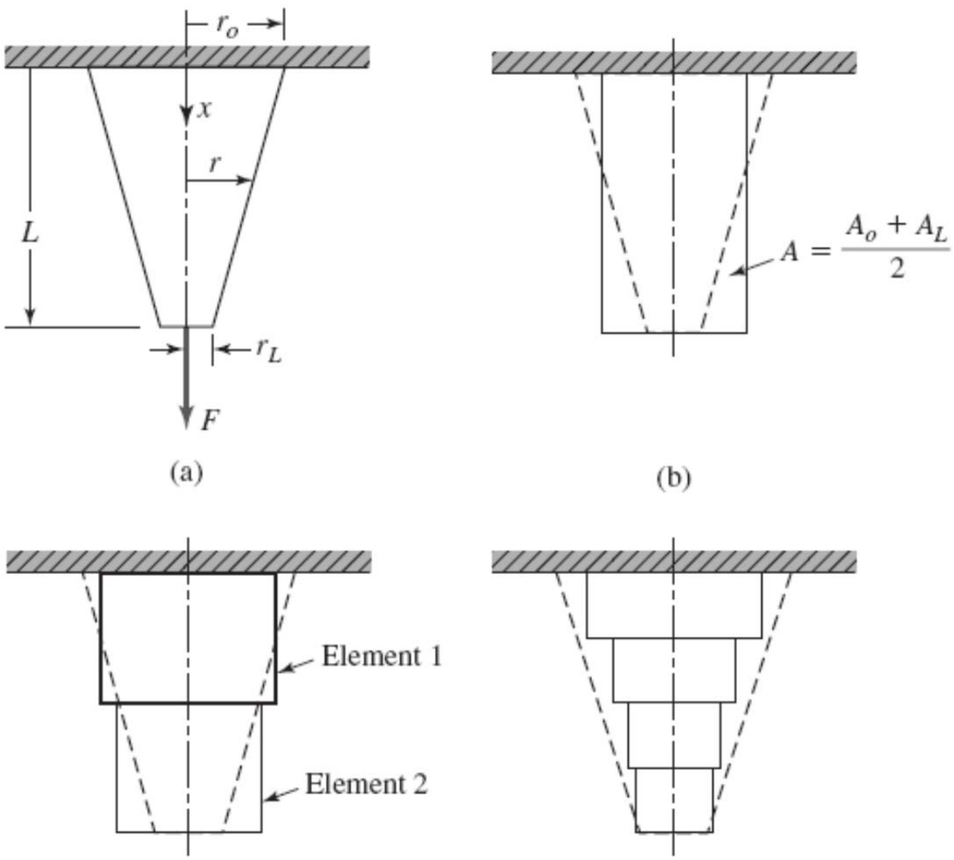
Razvoj MKE

- Ideja stara 2000 godina
  - Arhimed-broj π, zapremina piramida, površina sfrere)



- Razvoj počeo polovinom XX veka
  - Inžinjerski pristup (disketizacija složenih konstrukcija štapovima-linijski nosači)
  - Matematički pristup (diskretni modeli i variacioni postupak)

Razvoj MKE



Razvoj MKE

- Koncept metode je definisao 1941. *Hrenikoff*.
- Godine 1956 istraživači *Claugh*, *Martin*, *Turner* i *Torr* računarom su rešili zadatak ravanskog naponskog stanja krila aviona "BOEING", primenom trougaonih konačnih elemenata. Tada je na predlog američkog istraživača *Claugh*-a definisano današnje ime metode: "*the finite element method*", skraćeno FEM.
- Značajan doprinos širenju ideja i koncepta metode imala je štampa prve monografije autora *Zienkiewicz*-a i *Cheng*a 1967
- Sedamdesetih godina istraživač *Oden* značajno uopštava metodu, uvodeći u nju trodimenzionalnost, nelinearnost, dinamiku struktura, talasno prostiranje, uticaj fluida i optimalnost struktura

Razvoj MKE

- 80-tih MKE počinje se primenjivati i u oblasti plastičnosti (jednostavni procesi deformisanja - sabijanje valjka i istosmerno istiskivanje – kruto plastičan materijal)
- 90-tih, uvođenjem termo-mehaničke analize, brzine deformisanja, elasto-plastičnih i elasto-viskoplastičnih modela, napretkom u modelovanju kontaktnih i graničnih uslova, razvoju efikasnih algoritama (solvera) za rešavanje i dr. stvorene su pretpostavke za punu primenu MKE u oblasti obrade deformisanjem.
- Danas na tržištu postoji veliki broj komercijalnih softwera na bazi MKE koji se koriste za simulacije procesa deformisanja (Abaqus, QForm, DEFORM, Simufact.Forming, Pam-Stamp, AutoForm

Suština aproksimacije kontinuma po MKE

- MKE se zasniva na fizičkoj diskretizaciji (podeli) kontinuuma – zamena kontinualnog sistema ili procesa diskretnim, tj. aproksimacija kontinuuma konačnim brojem elemenata
- Posmatrani domen kontinuuma se deli pomoću zamišljenih linija ili površi na određeni broj poddomena konačnih dimenzija koji se nazivaju **konačnim elementima** i zajedno čine mrežu konačnih elemenata
- Konačni elementi su međusobno povezani u konačnom broju tačaka koje se nalaze na konturi elemenata i nazivaju se **čvorovi**
- Stanje promenljive (npr. polje pomeranja, deformacija, neprezanje, temperatura) u svakom konačnom elementu se opisuje pomoću **interpolacionih funkcija** (ili funkcija oblika)
- Parametri u čvorovima su osnovne nepoznate veličine u MKE
- Interpolacione funkcije su unapred zadate funkcije za jedan tip KE i predstavljaju vezu između vrednosti promenljive polja u bilo kojoj tački KE i vrednosti promenljive polja u čvorovima

Algoritamski koncept MKE

Korak po korak

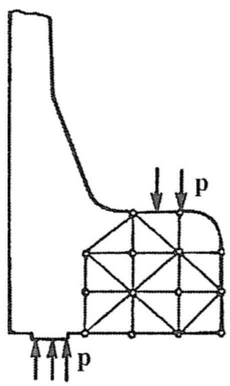
1. Diskretizacija kontinuuma
2. Opis ponašanja svakog konačnog elementa
   - Definisanje polja pomeranja
   - Izbor interpolacione funkcije
3. Formiranje jednačina za mrežu konačnih elemenata
4. Rešavanje sistema jednačina (određivanje nepoznatih u čvorovima)
5. Određivanje uticaja u elementima (pomeranja, naponi, deformacije, ...) – postprocessing

KRITERIJUMI DISKRETIZACIJE

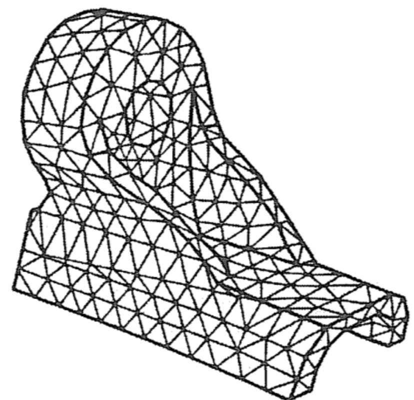
1. **Kriterijum broja stepeni slobode:** Što manji broj stepeni slobode i što kvalitetnije interpolacione funkcije. Umanjuje numerički obim problema i smanjuje potrebne hardverske resurse.
2. **Kriterijum manjih aproksimacija:** Manje odstupanje od tačne geometrije kod modeliranja. Ovaj zahtev uvećava broj stepeni slobode kretanja
3. **Kriterijum spoljašnjeg oblika:** Izbor konačnog elementa strukture može se izvršiti na osnovu sličnosti njegove geometrijske forme sa formom pravilnih delova objekta.
4. **Kriterijum poznavanja unutrašnje distribucije komponentnih napona članova kontinuuma:**

   Zasniva se na poznavanju osnovnih tipova naponskih distribucija kod ploče, ljuske, membrane, solida, grede, štapa. Kako unapred nije tačno poznata distribucija napona, često se nakon analize ispituje ispravnost izbora konačnih elemenata. To podrazumeva kontrolu nivoa i vrste komponentnih deformacija. Na taj način se proverava da li je izabran element "radio" po svojoj teoriji ili ne. Kada uslovi to dozvole, vrši se i eksperimentalna analiza. Na bazi toga se može reći da je modeliranje u teoriji konačnih elemenata i iskustvena kategorija.
5. **Kriterijum simetričnosti:** U slučaju centričnog ili simetričnog spoljašnjeg opterećenja, moguće je izvršiti modeliranje polovine, četvrtine ili dela konstrukcije, čime se problem racionalno opisuje manjim brojem stepeni slobode. To je slučaj sa cisternama, spojnicama, diskovima. Uticaj ostalih delova konstrukcije definiše se posredstvom graničnih uslova elastičnih pomeranja čvorova

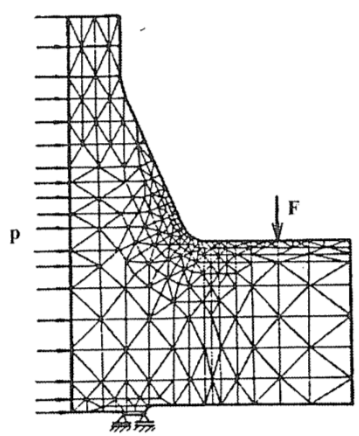
KRITERIJUMI DISKRETIZACIJE

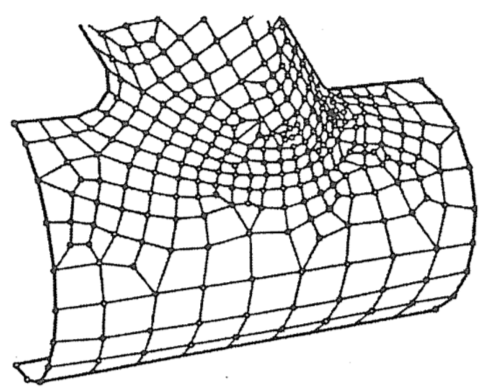


a.



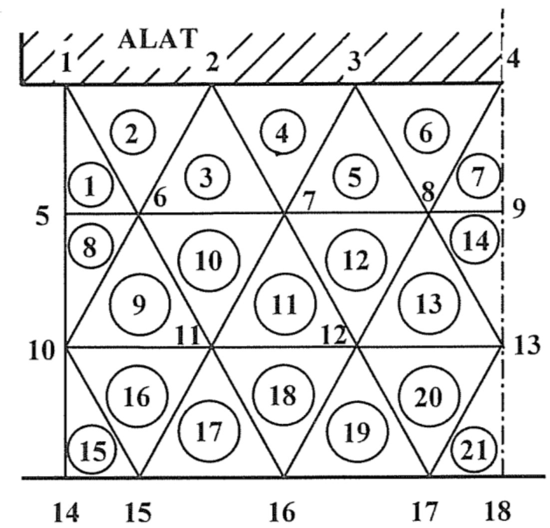
b.



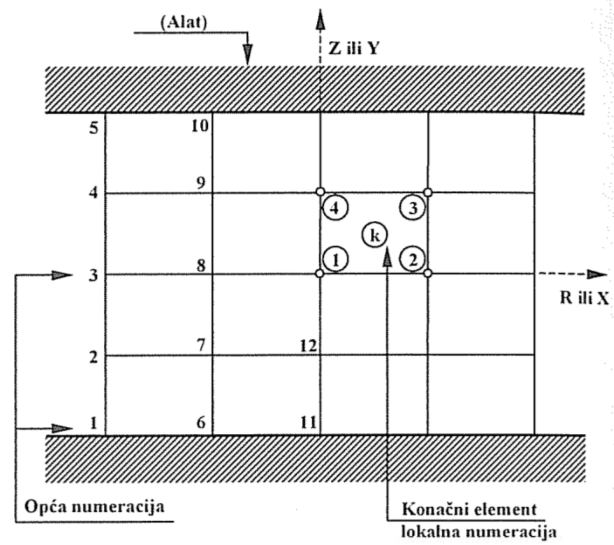


- Na mestima gde se očekuje povećanje naprezanja, tj. koncentracija naprezanja, mreža je sitnija i obratno.
- Ako je mreža konačnih elemenata sitnija, manja je mogućnost da između dve tačke ostane prostor gde je naprezanje ekstremno veliko.
- Veći broj elemenata povećava opseg izračunavanja i vreme rada računara.

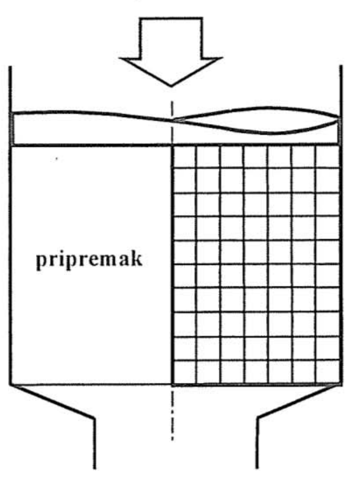
KRITERIJUMI DISKRETIZACIJE

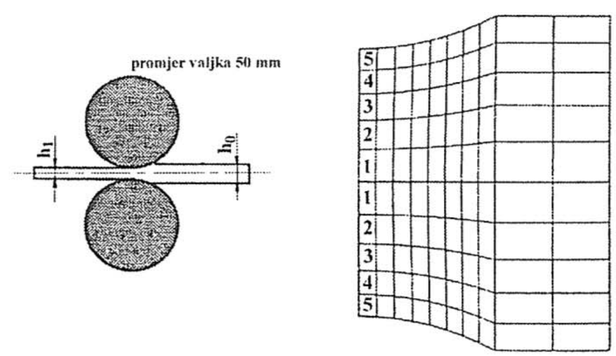


a.



a.





c.

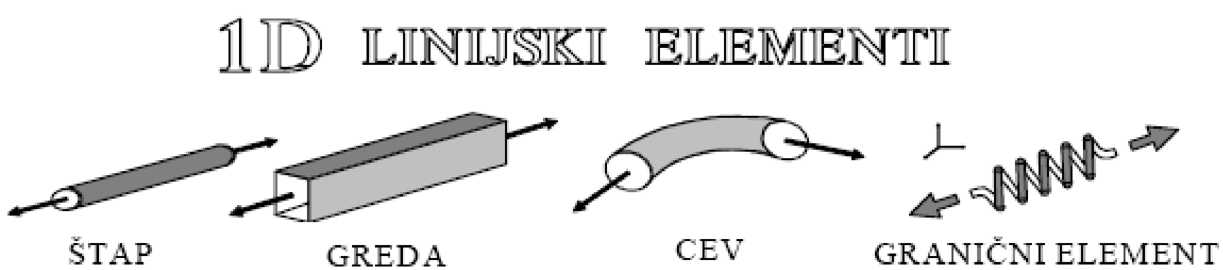
TIPOVI KONAČNIH ELEMENATA

- Izbor tipa konačnog elementa je jedan od najvažnijih koraka u primeni metoda konačnih elemenata. Pravilan izbor je veoma važan za dobijanje tačnih rezultata. Osnovne osobine konačnih elemenata su:
  - oblik
  - broj i vrsta čvorova
  - broj i vrsta stepeni slobode u pojedinim čvorovima i
  - vrsta interpolacionih funkcija.

- Bez bilo kog od ovih parametara, konačni element nije potpuno definisan. S obzirom na njihov oblik, elementi mogu biti sa pravolinijskim i sa krivolinijskim konturama. Bitna je podela na:
  - linijske
  - ravanske i
  - prostorne

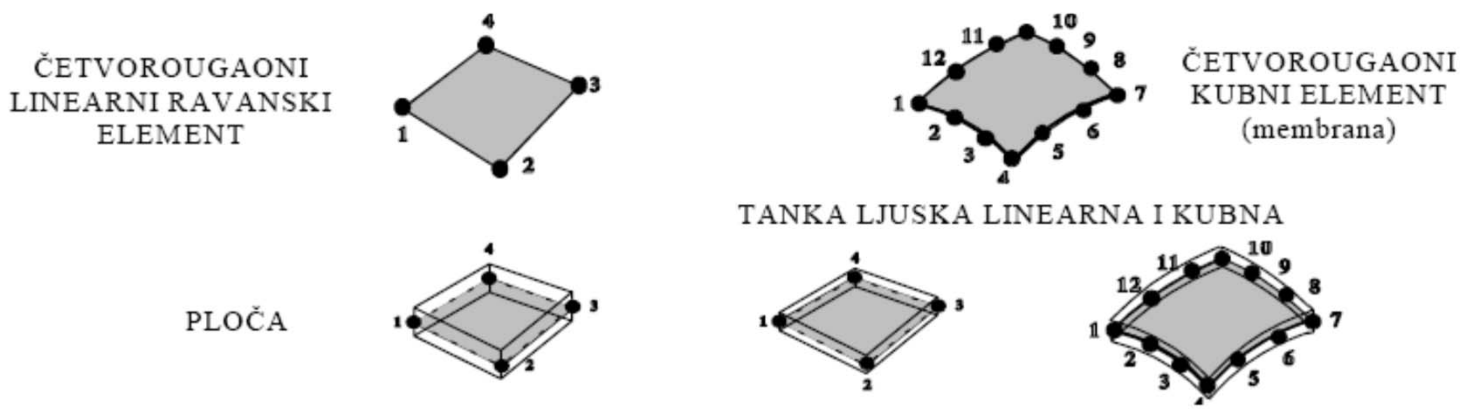
Linijski konačni elementi

- Linijski konačni element je deo prave ili krive linije. Kod ovog tipa elementa jedina dimenzija koja se razmatra je dužina.
  - štapovi – SPARS
  - grede – BEAMS



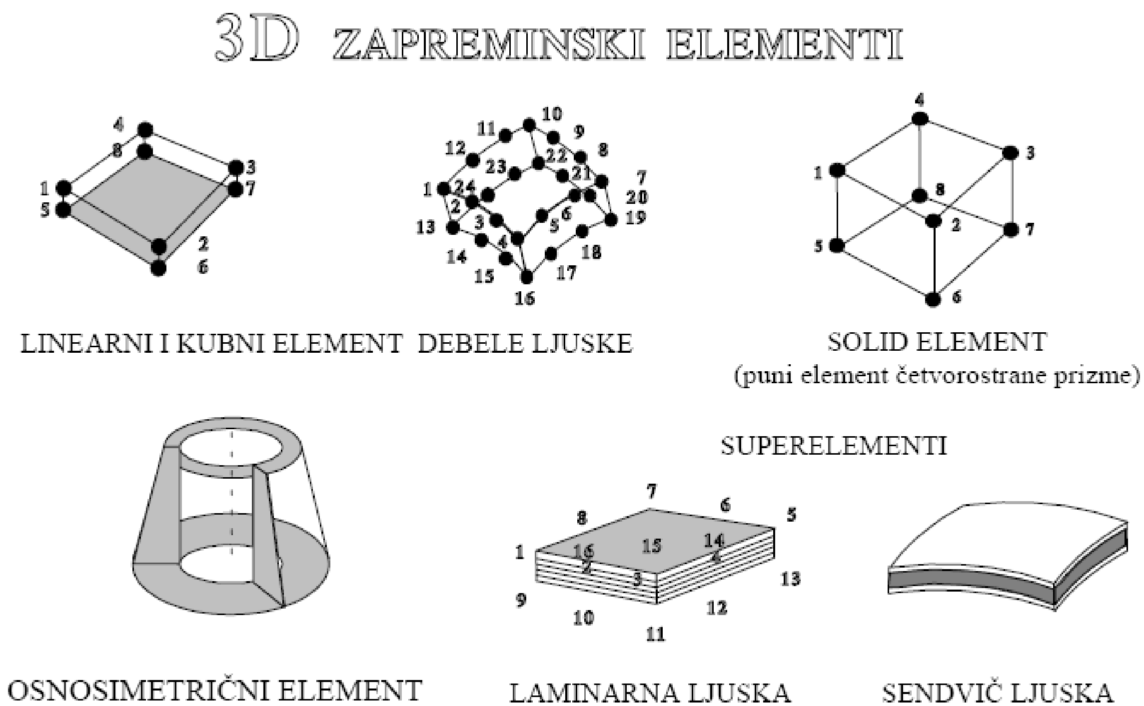
Ravanski konačni elementi

- Koriste se za analizu problema koji se mogu posmatrati kao dvodimenzionalni (ravno stanje deformacije i napona, osnosimetrično stanje deformacije).
- Najčešće su četvorougaonog ili trougaonog oblika



Prostorni konačni elementi

Koriste se za analizu trodimenzionalnih problema i obično su oblika tetraedra ili prizme. Kao i ravanski, mogu biti pravolinijski i krivolinijski



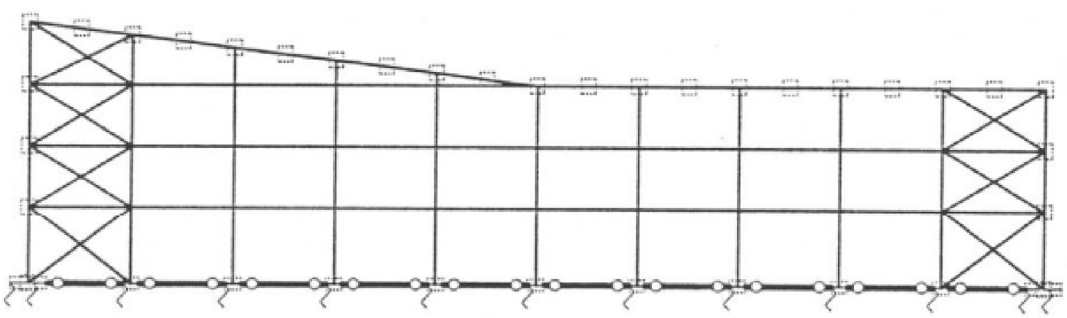
Osnovni vidovi MKE

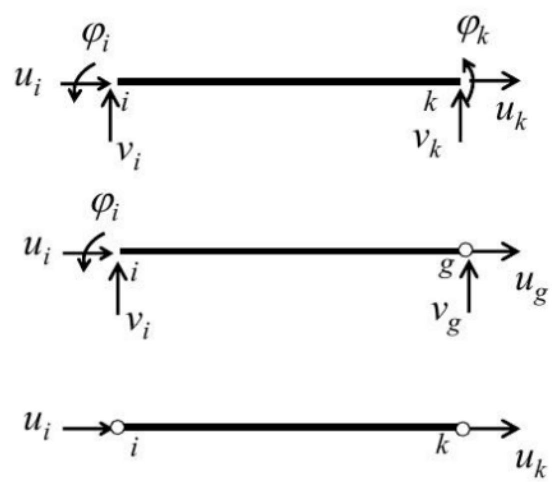
(prema načinu formulisana osnovnih jednačina)

1. Direktna metoda
2. Varijaciona metoda
   - princip o minimumu potencijalne energije (metoda deformacija)
   - princip o minimumu komplementarne energije (metoda sila)
   - Reissner-ov varijacioni princip (mešovita metoda)
3. Metoda reziduuma
4. Metoda energetskog balansa

MKE - Direktna metoda

- Analogna metodi deformacije u proračunu linijskih nosača.
- Koristi se kod relativno jednostavnih problema, a pogodna je zbog jasnog geometrijsko-mehaničkog značenja pojedinih koraka aproksimacije.





MKE - Direktna metoda

- Analaiza linijskih nosača zasnovana na primeni matričnog računa
- Osnovna ideja matrične analize je da se linijski nosač posmatra kao skup određenog broja elemenata (štapova) koji su međusobno vezani u čvorovima nosača.
- U svakom elementu nosača sile i pomeranja unutar elementa izražavaju se preko izabranih parametara u čvorovima nosača.
- Parametri u čvorovima nosača predstavljaju osnovne nepoznate veličine u matričnoj analizi.
- Za nepoznate parametre u čvorovima nosača (u ravni) mogu da se izaberu:
    1. generalisanja pomeranja (komponente pomeranja i obrtanja) . . . u, v, ϕ
    2. sile u čvorovima (komponente sile i spreg) . . . S, V, M
- Za određivanje nepoznatih parametara u čvorovima koriste se dve grupe jednačina:

  1 uslovi ravnoteže sila u čvorovima

  2 uslovi kompatibilnosti generalisanih pomeranja u čvorovima

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

MKE Direktna metoda - podela

(u zavisnosti od izbora nepoznatih u čvorovima)

- **Metoda deformacija** (nepoznate su kinematske veličine - parametri pomeranja u čvorovima)
- Metoda sila (nepoznate su statičke veličine-sile i naponi u čvorovima)
- Hibridna ili mešovita metoda (nepoznate su kinematske i statičke veličine u čvorovima

Direktna metoda

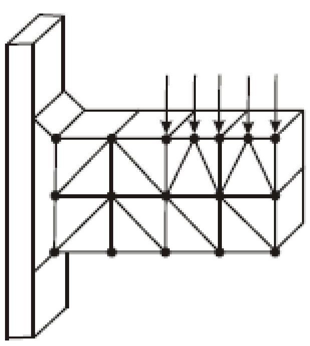
Metoda deformacija - formulacija na bazi pomeranja

- Većina pristupa MKE u mehanici zasnovana je na **polju pomeranja** kao osnovnim nepoznatim.
- Za neke od konacnih elemenata relacije mogu da se formulišu direktnim putem, kao što su linijski konacni elementi za rešetkaste i pune štapove, u ravni ili u prostoru
- Za površinske ili prostorne konačne elemente polazi se od osnovnih relacija u mehanici, odn. u naponsko-deformacijskoj analizi i teoriji elastičnosti:
  - veza između napona i deformacija
  - veza između deformacija i pomeranja
  - uslova ravnoteže (ili diferencijalnih jednačina kretanja)
  - graničnih i početnih uslova
  - odgovarajučih pricipa mehanike

Direktna metoda

Metoda deformacija - formulacija na bazi pomeranja

- Za naponsku analizu koriste se osnovne jednačine zavisnosti napon-deformacija.
- Pomeranja u čvorovima, usled dejstva sila, se koriste za proračun deformacije elemenata, a na osnovu konstitutivnih jednačina se proračunavaju naponi.
- Elementi se ponašaju slično sistemu elastičnih opruga – matrčni račun.
- Matrica krutosti - neka vrsta elastične konstante koja opisuje koliko čvornih tačaka je pomereno pod dejstvom sistema sila.
- Matrica krutosti se formira od koordinata čvorova i matrice elastične konstante materijala-

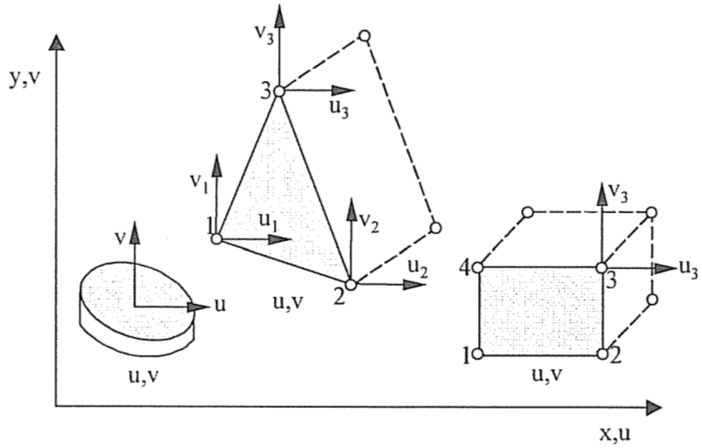


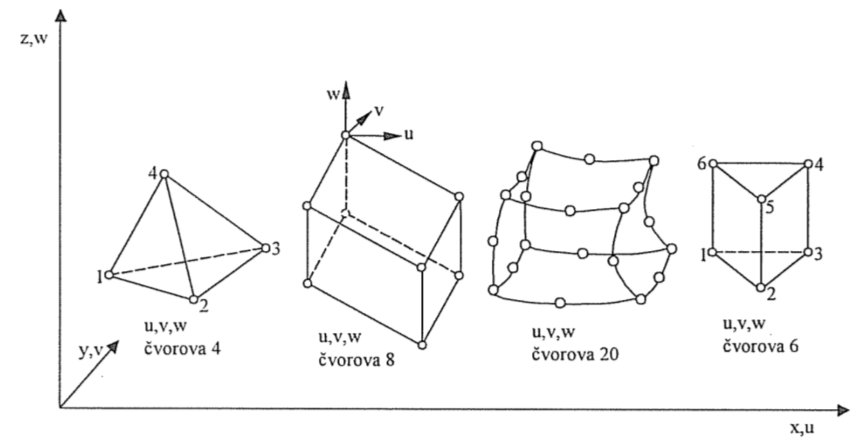
$$\{F\} = [K]\{q\}$$

{F} - matrica (vektor) sila koje deluju na element
[K] - matrica krutosti elementa
{q} - matrica pomeranja čvorova elementa

Direktna metoda

Metoda deformacija - formulacija na bazi pomeranja

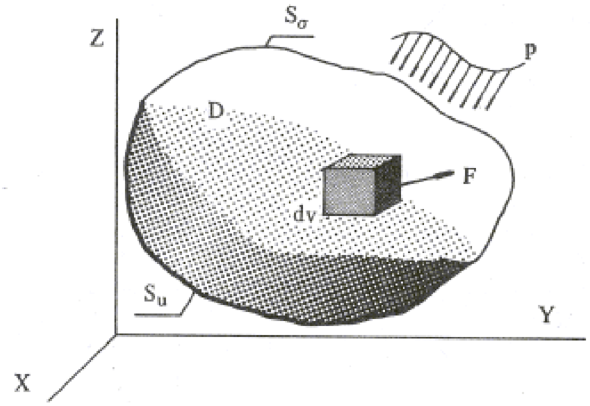




- Za svaku čvornu tačku, gde se spajaju elementi, postavljaju se jednačine koje definišu vezu naprezanja i deformacija.
- Preko čvornih tačaka na spoljnim konturama uvode se spoljna opterećenja i uključuju u sistem jednačina elastičnosti, naprezanja i deformacija.
- Rešavanjem ovih sistema jednačina dobiju se pomaci, odnosno deformacije i naprezanja u svim čvornim tačkama.

Direktna metoda

Metoda deformacija - formulacija na bazi pomeranja



jednačine ravnoteže

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \sum Fx$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \sum Fy$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \sum Fz$$

- Površinske sile **p** (p_x, p_y, p_z),
- Zapreminske sile **F** (F_x, F_y, F_z)

Pomeranja **u** u oblasti **D** pretpostavlja se da su neprekidne funkcije koordinata:
u=u (x, y, z)

$$u = u(x, y, z)$$

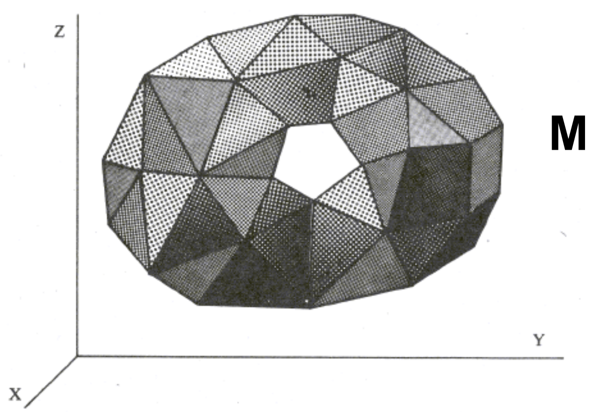
$$v = v(x, y, z)$$

$$w = w(x, y, z)$$

Zadatak teorije elastičnosti – kada se problem formuliše po pomeranjima, odnosno po metodi deformacije potrebno je odrediti funkcije pomeranja koje zadovoljavaju uslove ravnoteže i uslove na konturi!

Direktna metoda

Metoda deformacija - formulacija na bazi pomeranja



MKE – podela domena na konačan broj malih delova.

- Ako se pretpostavi da se pomeranja u bilo kojoj tački konačnog elementa mogu prikazati u zavisnosti od pomeranja u čvorovima, onda se problem određivanja polja pomeranja u oblasti D svodi na određivanje pomeranja u čvorovima, a broj pomeranja u čvorovima je konačan.
- Pomeranja u čvorovima u oblasti D i na konturi $S\sigma$ određuju se iz sistema jednačina koje predstavljaju uslove ravnoteže u čvorovima, uslova kontinuiteta u čvorovima i konturnih uslova.
- Ove jednačine mogu se dobiti na osnovu *principa virtualnih pomeranja* ili na osnovu varijacinog *principa o minimumu potencijalne energije*.

Direktna metoda

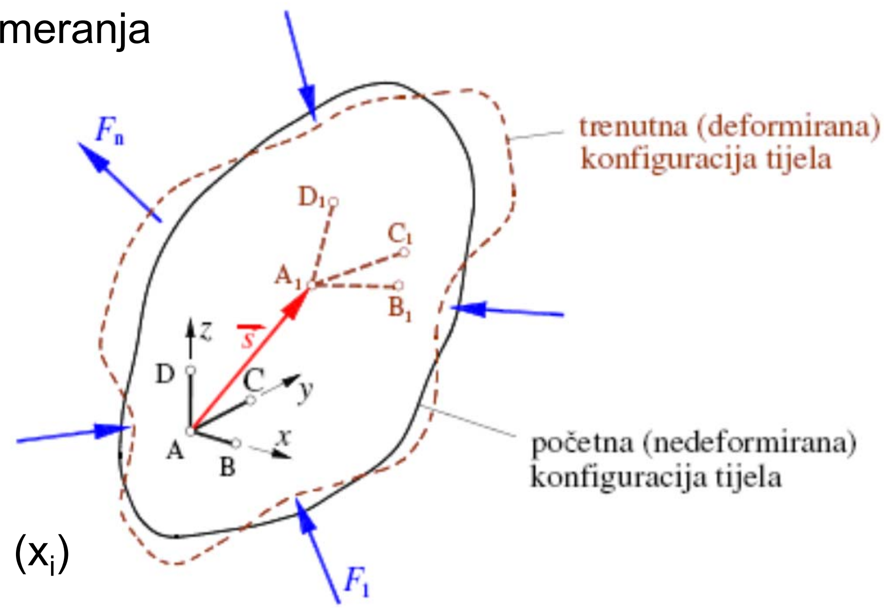
Pomeranja tačaka tela

Pod deformacijom/deformisanjem se podrazumeva promena rastojanja između tačaka tela, a takođe i promena uglova među pravcima.

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + w\,\vec{k}$$ - vektor pomeranja

$$\vec{s} = (x, y, z) = \{s\} = \begin{Bmatrix} u\,(x, y, z) \\ v\,(x, y, z \\ w\,(x, y, z \end{Bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$



U slučaju homogenog deformisanja, veza između koordinata tačaka pre deformacije (x_i) i nakon deformacije (X_i) je linearna.

$$X_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$$

$$X_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{33} x_3$$

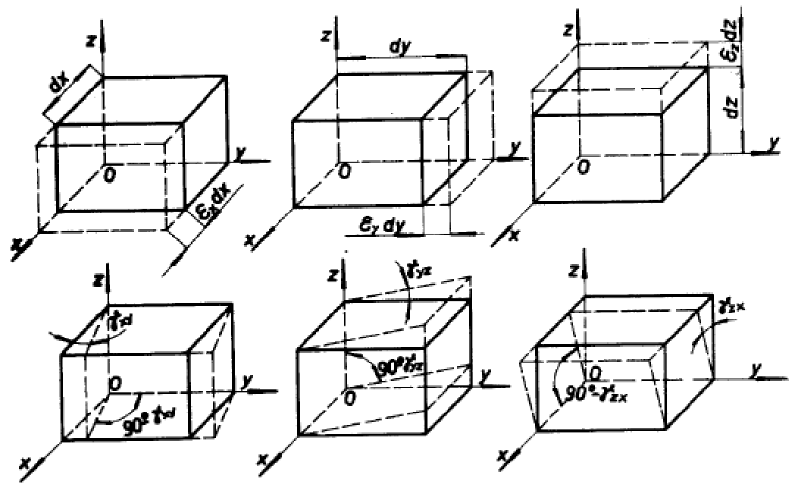
$$X_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3$$

Direktna metoda

Veza pomeranje – deformacije

Relativne linijske (male) deformacija (ε) :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$



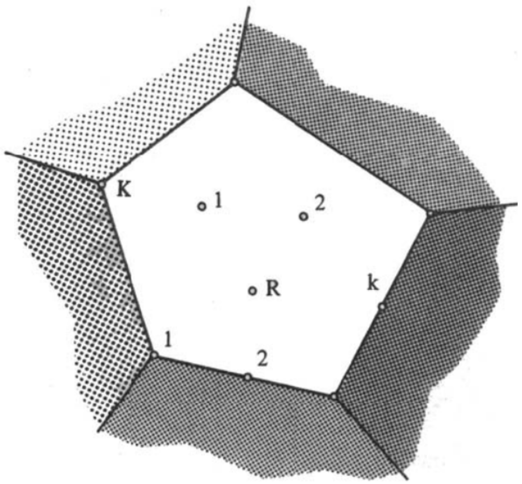
GEOMETRIJSKO ZNAČENJE KOMPONENATA MALE DEFORMACIJE

Relative ugaone (male) deformacije (klizanje - γ):

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$
$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}$$
$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Direktna metoda

Analiza elemenata



Osnovne nepoznate – pomeranja u spoljnim čvorovima

$$q_k = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2 \ldots . k)$$

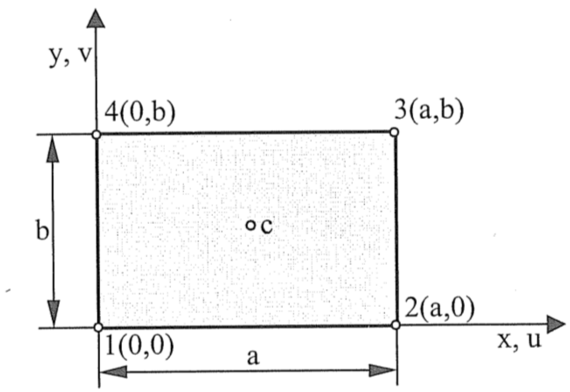
$$q_k = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \\ \\ \\ q_k \end{bmatrix}$$

Pomeranja u unutrašnjim čvorovima nemaju ulogu osnovnih nepoznatih već se uvode da obezbede bolju aproksimaciju polja pomeranja/deformacija u elementu.

Direktna metoda

Analiza elemenata – polje pomeranja unutar elementa



Pomeranja u proizvojnoj tački konačnog elementa prikazuju se u zavisnosti od parametara pomeranja u čvorovima!!!

Ta zavisnost se uspostavlja pomoću *interpolacionih funkcija!*

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$
$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy$$

$$\{u\} = [A]\{\alpha\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \\ \beta_4 \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \\ \\ \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

q – vektor pomeranja u čvorima
u – vektor pomaka unutar konačnog elementa
$\boldsymbol{\alpha}_i$ – koeficijenti čiji je broj jednak broju stepeni slobode elementa

Direktna metoda

Analiza elemenata – polje pomeranja unutar elementa

$$\{u\} = [A]\{\alpha\}$$

Ako se izraz (3.8) primeni na tačke u temenima, koje se poklapaju sa čvorovima elementa, dobija se

$$\mathbf{q} = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha} \tag{3.11}$$

gde je

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Iz jednačine (3.11) sledi:

$$\alpha = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{q}$$

$$(\det \mathbf{C} \neq 0)$$

Smenom (3.13) u (3.8), dobija se

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}_q \mathbf{q}$$

gde je

$$\mathbf{A}_q = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$$

$$[A_q] = \begin{bmatrix} \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \frac{x}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b} & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \frac{x}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b} \end{bmatrix}$$

Direktna metoda

Analiza elemenata – polje pomeranja unutar elementa

Opšta veza između promene neke funkcije u elementu i njenih vrednosti u čvorovima elementa uvek ima sledeći oblik:

$$\phi(x,y,z) = N_k(x,y,z)\cdot\phi^k = [N_1, N_2 \ldots N_k \ldots N_n]\begin{bmatrix}\phi^1\\ \phi^2\\ \vdots\\ \phi^k\\ \vdots\\ \phi^n\end{bmatrix}$$

$N_k(x,y,z)$ - interpolaciona funkcija (matrica) koja odgovara čvoru k,
ϕ^k - vrednost funkcije u čvoru (k).
$\phi\,(x,y,z)$ – bilo koja skalarna funkcija komponenta pomaka , izvodi pomaka, ili neka vektorska ili tenzorska veličina.

$$\{u\} = [N]\,\{q\}$$

[N] – matrica interpolacijskih funkcija
{u}- pomeranja unutar elementa
{q}- pomeranja čvorova elementa

Direktna metoda

Analiza elemenata – polje pomeranja unutar elementa

$$\{u\} = [N]\{q\}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & . & . & . & N_{1k} & . & . & N_{1K} & & \\ & N_{21} & & \dots & & N_{2k} & \dots & & N_{2K} & \\ & & N_{31} & \dots & & & N_{3k} & & & N_{3K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \\ . \\ . \\ . \\ q_{1k} \\ q_{2k} \\ q_{3k} \\ . \\ . \\ . \\ q_{1K} \\ q_{2K} \\ q_{3K} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

gde su sa u_1, u_2, u_3 obeležena pomeranja u, v, w, a sa q_{1k}, q_{2k}, q_{3k} $(k = 1, 2 \dots K)$ komponente pomeranja u čvoru k u pravcu x, y, z.

Kada je poznato polje pomeranja u elementu (gornja jednačina) sledeći korak je definisanje polja deformacija!!!

Direktna metoda
INTERPOLACIONE FUNKCIJE

- Funkcije pomoću kojih se predstavlja polje promenljivih u elementu, nazivaju se **interpolacione funkcije, funkcije oblika ili aproksimativne funkcije.**
- Interpolacija znaci formiranje kontinualnih funkcija koje zadovoljavaju propisane uslove u konačnom broju tačaka
- U MKE konačan broj tačaka su čvorne tacke konacnih elemenata, a propisani uslovi su vrednosti nepoznatih, a eventualno i njihovih izvoda, u čvornim tackama
- čvorne vrednosti mogu da budu i tacne (što obicno nisu u potpunosti), ali interpolacija pretstavlja približnu raspodelu nepoznatih unutar posmatrane oblasti (unutar konačnog elementa)
- Interpolaciona funkcija se pretpostavlja za svaki konačni element, pri čemu ona mora zadovoljiti odgovarajuće granične uslove duž granica elementa
- Pomoću interpolacionih funkcija se uspostavlja neposredna veza između vrednosti funkcije u bilo kojoj tački elementa i osnovnih nepoznatih parametara u čvorovima.
- Vrednost funkcije u nekoj tački se interpolira između njenih vrednosti u čvorovima.
- Pomoću ovih funkcija određena je samo kvalitativno promena funkcije u elementu, što znači da je definisan samo njen oblik dok je intenzitet te promene određen vrednostima parametara u čvorovima.
- Od izbora interpolacionih funkcija zavisi ispunjenje kontinuiteta između pojedinih elemenata.
- U MKE se uglavnom koriste polinomi kao interpolacione funkcije i to: **Lagrange-ovi polinomi, Serendipity funkcije i Hermite-ovi polinomi.**

Direktna metoda

INTERPOLACIONE FUNKCIJE

Lagrange-ov polinom

$$P(x,y) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot x^2 + a_6 \cdot y^2 + a_7 \cdot x^2 \cdot y + a_8 \cdot x^2 \cdot y^2 + \ldots$$

Njihovo rešenje konvergira tačnom rešenju kada polinom ima beskonačan red. Kvalitetna interpolaciona funkcija zahteva onaj stepen polinoma koliki je broj nezavisno promenljivih u elementu. Sa druge strane, visok stepen polinoma je nepodesan, zbog poteškoća eliminacija unutrašnjih članova, pa se primenjuju samo za odredjene tipove konačnih elemenata.

Serendipity funkcije i Hermite-ovi polinomi

Serendipity funkcije su funkcije čvornih tačaka konture. Njihove vrednosti su 1.0 u čvorovima i 0.0 izvan čvorova. Hermitovi polinomi su polinomi višeg stepena sa osobinama dobrog kontinuiteta na granicama izmedju elemenata. Koeficijenti ovih funkcija se određuju iz uslova kompatibilnosti i uslova statičke ravnoteže.
Serendipity funkcije su tako oblikovane da direktno povezuju pomeranja u elementu sa pomeranjima u čvorovima što eliminiše potrebu izračunavanja njihovih inverznih matrica i značajno ubrzava postupak. Koriste se za preciznije opisivanje graničnih uslova.

Direktna metoda

Analiza elemenata – polje deformacija

Prema teoriji elastičnosti (Košijeve jednačine) veza između deformacija tačaka unutar elementa **ε** i pomeranja **u** glasi:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\}$$

L - matrica diferencijalnih operatora

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{q\} = [B]\{q\}$$

$$\{u\} = [N]\{q\}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

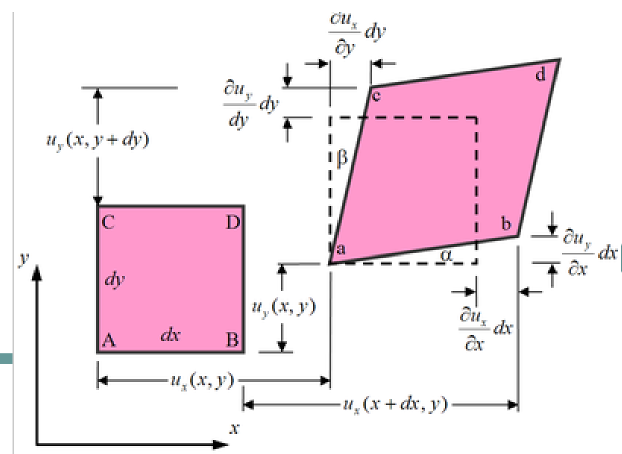
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

[B] - matrica operator koja povezuje deformacije unutar elementa i pomeranja čvorova elemenata

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}.$$



Direktna metoda

Analiza elemenata – polje napona

Veza između napona ***σ*** i deformacija unutar elemenata ***ε*** (generalizovani Hooke-ov zakon), odnosno pomeranja čvornih tačaka:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \qquad \rightarrow \qquad \{\varepsilon\} = [E]^{-1}\{\sigma\} = [C]\{\sigma\}$$

$$\{\sigma\} = [E][B]\{q\} = [S]\{q\}$$

[S] - matrica operator koji opisuje vezu između napona unutar elementa i pomeranja čvorova elemenata.
[E] - matrica elastičnosti
[C] – matrica fleksibilnosti

$$[E] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ s & & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \\ & i & & e_{44} & e_{45} & e_{46} \\ & & m & & e_{55} & e_{56} \\ & & & & & e_{66} \end{bmatrix}$$

Direktna metoda

Analiza elemenata – polje napona

Kada se radi o homogenim izotropnim elastičnim materijalima i toplinskim utjecajima, matrica elastičnosti $[E]$ može se prikazati s Lameovim koeficijentima, λ i μ:

$$[E]=\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & \text{simetrično} & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \qquad (6.29)$$

ili pomoću koeficijenta Younga i Poissona:

$$[E]=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & \text{simetrično} & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}, \qquad (6.30)$$

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu=G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

E - modul elastičnosti
ν – Poason-ov koeficijent

Direktna metoda
Analiza elemenata – matrica krutosti

Generalisane sile kao koncentrisane sile u čvorovima elemenata, koje su ekvivalentne komponentnim naponima duž kontura elemenata, mogu se prikazati u sledećem obliku:

$$\{F\} = [T]\{\sigma\}$$

[T] - pravougaona matrica sa n vrsta i m kolona (m- broj komponenti u vektoru napona) i predstavlja vezu generisanih sila i napona, odnosno definiše uslove ravnoteže

$$\{F\} = [T][S]\{q\} = [K]\{q\}$$

[K] - ***MATRICA KRUTOSTI ELEMENTA***

[K]= [T] [S] = [T] [E] [B] = [T] [E] [L] [N]

Poznavanjem matrice krutosti nepoznata pomeranja čvorova određuju se iz jednačine:

$$\boxed{\{q\} = [K]^{-1}\{F\}}$$

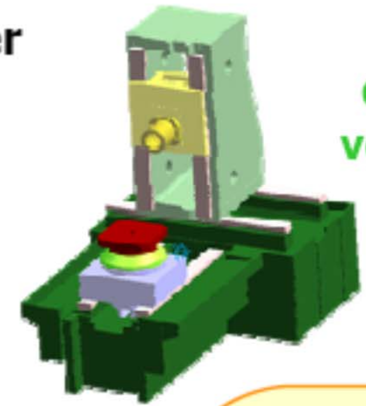
Algoritam MKE - primer

Example: Vertical machining center

Elastic deformation

Thermal behavior

etc.



Geometry is very complex!

Governing Equation: $L(\phi) + f = 0$

Boundary Conditions: $B(\phi) + g = 0$

You know all the equations, but you cannot solve it by hand

FEM ⇒ **Approximate!**

A set of simultaneous algebraic equations

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}$$

Algoritam MKE-primer

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{K}]^{-1}\{\mathbf{F}\}$$

Property

Behavior

Action

Unknown

	Property $[\mathbf{K}]$	Behavior $\{\mathbf{u}\}$	Action $\{\mathbf{F}\}$
Elastic	stiffness	displacement	force
Thermal	conductivity	temperature	heat source
Fluid	viscosity	velocity	body force
Electrostatic	dialectri permittivity	electric potential	charge

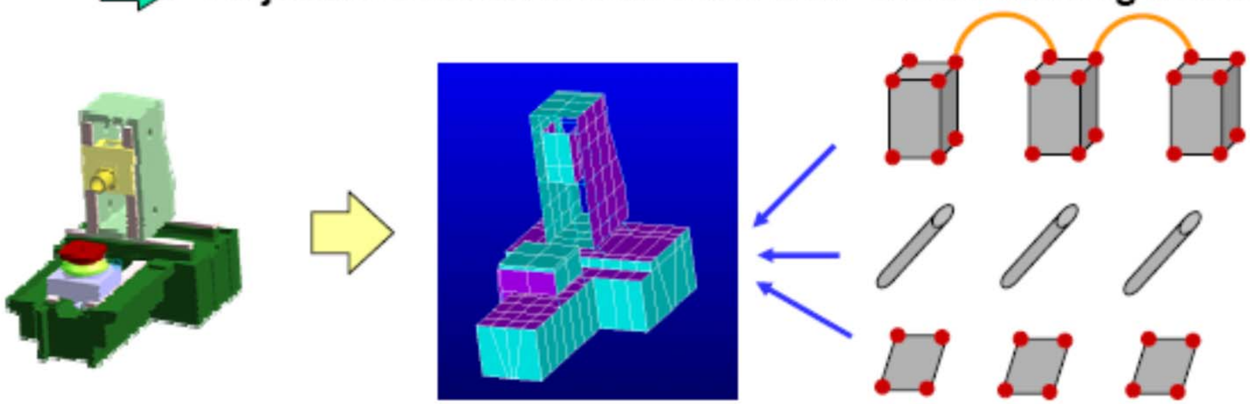
Algoritam MKE-primer

It is very difficult to make the algebraic equations for the entire domain

Divide the domain into a number of small, simple elements

A field quantity is interpolated by a polynomial over an element

Adjacent elements share the **DOF** at connecting nodes

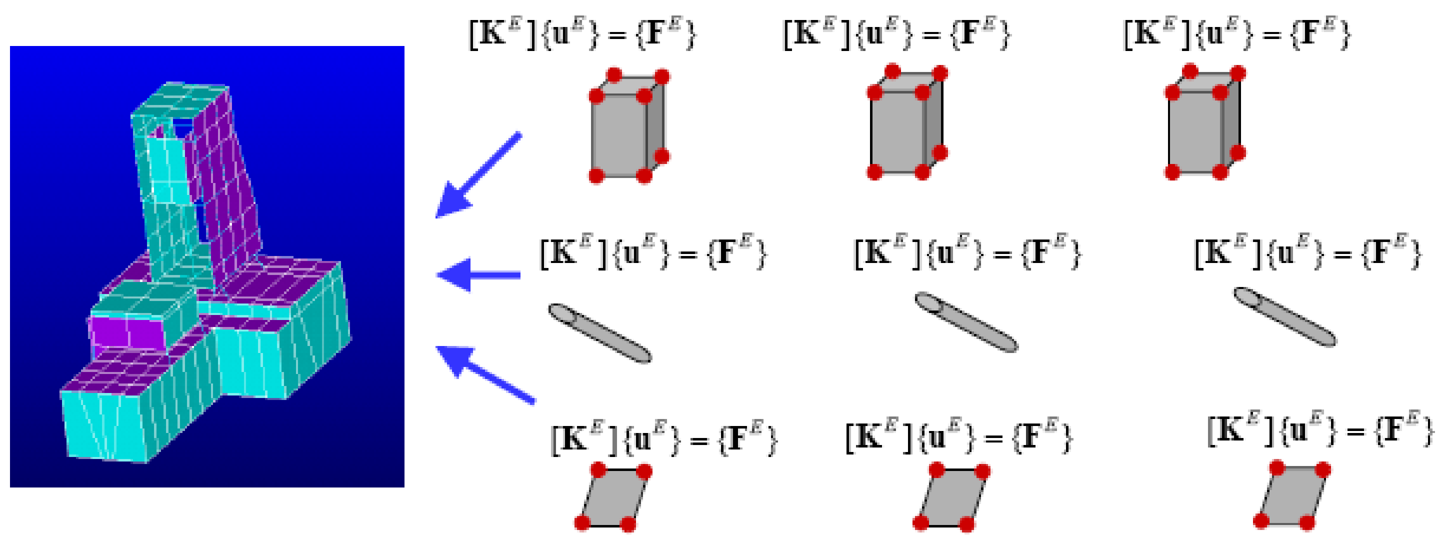


Finite element: Small piece of structure

Algoritam MKE-primer

Obtain the algebraic equations for each element (this is easy!)

➡ Put all the element equations together

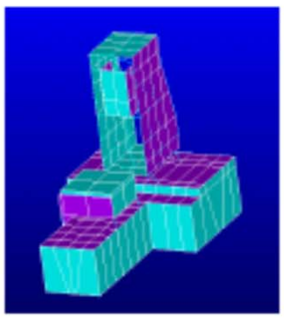


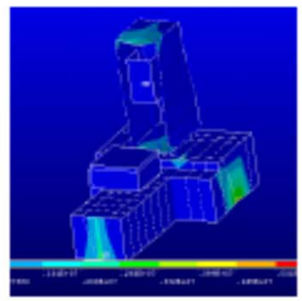
$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}$$

Algoritam MKE-primer

Solve the equations, obtaining unknown variabless at nodes.

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{K}]^{-1}\{\mathbf{F}\}$$





Variaciona metoda

- Zasniva na principu o stacionarnosti funkcionala Π

  (U problemima mehanike čvrstog tela funkcional je obično potencijalna odnosno komplementarna energija sistema ili se funkcional formuliše na osnovu ove dve energije)

- Izvedena je iz klasične metode *Ritz*-a
- Red izvoda u funkionalu je niži od izvoda diferencijalnih jednačina razmatranog problema
- Uspešno se primjenjuje kako na elemente jednostavnog tako i elemente složenog oblika.
- Najviše zastupljena metoda

Variaciona metoda-nastavak

- Osnovni variacioni principu u mehanici čvrstog tela:
  - Princip o minimumu potencijalne energije
  - Princip o minimumu komplementarne energije
  - Reissne-or varijacioni princip

Varijaciona metoda – Princip virualnog rada

- Virtualna pomeranja (δ)- beskonačno mala pomeranja koja su neprekidne i diferencijabilne funkcije koordinata tačaka tela i koja su jednaka nuli u svim onim tačkama konture u kojima su zatati konturni uslovi po pomeranjim.
- Rad spoljašnjih sila $$V = \int_V F^T \cdot u \cdot dv + \int_S p^T \cdot u \cdot ds$$
- Rad unutrašnjih sila-potencijalna energija $$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \cdot \varepsilon \cdot dv$$
- Totalna energija – POTENCIJAL Lagrange-a $$\Pi = U + V$$

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon dv - \int_V F^T u dv - \int_{S_\sigma} p^T u ds$$

- Princip minimuma rada $$\boxed{\delta\Pi = \delta U + \delta V = 0}$$

Varijaciona metoda – Matrica krutosti

Metoda konačnih elemenata često umjesto jednadžbi stanja ravnoteže primijenjuje princip virtualnih pomaka ili princip virtualnog rada. Ovaj princip se temelji na jednakosti virtualnog rada vanjskih i virtualnog rada unutrašnjih sila:

$$\delta W = \delta U \tag{6.40}$$

ili

$$\delta (W - U) = 0 . \tag{6.41}$$

Rada vanjskih sila (virtualni rad vanjskih sila na konturi tijela):

$$\delta W = \int_{A_p} \left(p_{n1} \delta q_1 + p_{n2} \delta q_2 + \ldots + p_{nk} \delta q_k \right) dA . \tag{6.42}$$

Potencijalna energija deformiranja (virtualni rad unutrašnjih sila):

$$\delta U = \int_V \left(\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} \right) dV . \tag{6.43}$$

Varijaciona metoda – Matrica krutosti

$$dW = \{\delta q\}^T \{F\} \tag{6.44}$$

ili prema (6.43) potencijalna energija deformiranja:

$$\delta U = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \ . \tag{6.45}$$

Koristeći izraz (6.40) i izraze (6.44) i (6.45), te izraze (6.35) i (6.39), može se pisati:

$$\int_V ([B]\{\delta q\})^T \left([E][B]\{q\} + \{\sigma^t\} \right) dV = \{\delta q\}^T \{F\}$$

ili

$$\int_V [B]^T [E][B]\, dV \{q\} + \int_V \left\{ [B]^T \{\sigma^t\} \right\} dV = \{F\}. \tag{6.46}$$

Varijaciona metoda – Matrica krutosti

U izrazu (6.46) matrica krutosti konačnog elementa ima oblik:

$$[k]=\int_V [B]^T [E]\ [B]\, dV \tag{6.47}$$

ili

$$[k]=[B]^T [E] [B]\, V\ , \tag{6.48}$$

gdje je: volumen

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}\ , \tag{6.49}$$

$[B]^T$ - transponirani oblik matrice $[B]$.

Vektor sila u čvorovima konačnog elementa uslijed toplinske deformacije:

$$\{F^t\}=\int_V [B]^T\ \{\sigma^t\}\, dV\ . \tag{6.50}$$

Bez utjecaja temperature i toplinskih deformacija dobiva se osnovna jednadžba veze sile u čvorovima $\{F\}$ i pomaka u čvorovima konačnog elementa $\{q\}$, tako da je vektor sila u čvorovima konačnog elementa za slučaj statičkog opterećenja:

$$\{F\}=[k]\ \{q\} \tag{6.51}$$

ili vektor pomaka u čvorovima konačnog elementa:

$$\{q\}=[k]^{-1}\{F\}. \tag{6.52}$$

Varijaciona metoda – Matrica krutosti

Integriranje se zamjenjuje sumiranjem diskretnih vrijednosti, tako se matrica krutosti može prikazati preko podmatrica, tj. za $r = i, j, m, n,$ i za $s = i, j, m, n$:

$$[k]=\begin{Vmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{ik} & k_{iK} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jk} & k_{jK} \\ k_{ki} & k_{kj} & k_{kk} & k_{kK} \\ k_{Ki} & k_{Kj} & k_{Kk} & k_{KK} \end{Vmatrix}, \qquad (6.53)$$

gdje je $[k_{rs}]=[B_r]^T[D][B_S]V$.

Jednadžba (6.51) može se za konačni element prikazati s komponentama u pojedinim čvorovima i, j, k, K:

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \\ F_K \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{ik} & k_{iK} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jk} & k_{jK} \\ k_{ki} & k_{kj} & k_{kk} & k_{kK} \\ k_{Ki} & k_{Kj} & k_{Kk} & k_{KK} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_k \\ q_k \end{Bmatrix} \qquad (6.54)$$

Ako je struktura raščlanjena na n konačih elemenata, ukupna matrica krutosti je

$$[K]=\sum_{(n)}[k_{rs}]_{(k)}, \qquad k=1,n\ . \qquad (6.55)$$

Matrica krutosti $[K]$ odredi se poznavanjem:

- geometrijskih i fizikalnih karakteristika pojedinih konačnih elemenata,
- vanjskog opterećenja i
- načina oslanjanja sistema.

Varijaciona metoda – Matrica krutosti

Sumiranje se provodi po dijagramu matrice, tako da je za konačni element sa dva čvora i strukturu od tri elementa:

$$[K]=\begin{Vmatrix} k_{11(1)} & k_{12(1)} & 0 & 0 \\ k_{21(1)} & k_{22(1)}+k_{22(2)} & k_{23(1)} & 0 \\ 0 & k_{32(2)} & k_{33(2)}+k_{33(3)} & k_{34(3)} \\ 0 & 0 & k_{43(3)} & k_{44(3)} \end{Vmatrix} \qquad (6.56)$$

Za višečvorne elemente i za složenu strukturu, matrica krutosti postaje složena i velika. Simetrična je i pojasnog oblika. Širina pojasa ovisi od složenosti strukture, načina podjele, broja konačnih elemenata, te načina podjele i numeriranja čvorova i elemenata:

$$[K]=\begin{Vmatrix} \times & \times & \times & & & \\ \times & \times & \times & \times & & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times & \times \\ & 0 & & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times \end{Vmatrix} . \qquad (6.57)$$

Prikazani način formiranja matričnih jednadžbi dat je s ciljem da se pokaže metodologija postupka. Kod gotovih programa za MKE, veliki broj prikazanih operacija je automatiziran. Način korištenja programa je različit. Najvažniji su ulazni parametri opterećenja i ograničenja.

Metoda reziduuma

- Opšti vid aproksimacije po MKE
- Zasniva se na diferencijalnim jednačina razmatranog problema.
- Primenjuje se kod problema kod kojih je teško formulisati funkcional i onih problema kod kojih funkcional uopšte ne egzistira

Weighted Residual Methods

- Weighted residual method is a generic class of method developed to obtain approximate solution to the differential equations of the form

$$L(\varphi) + f = 0$$

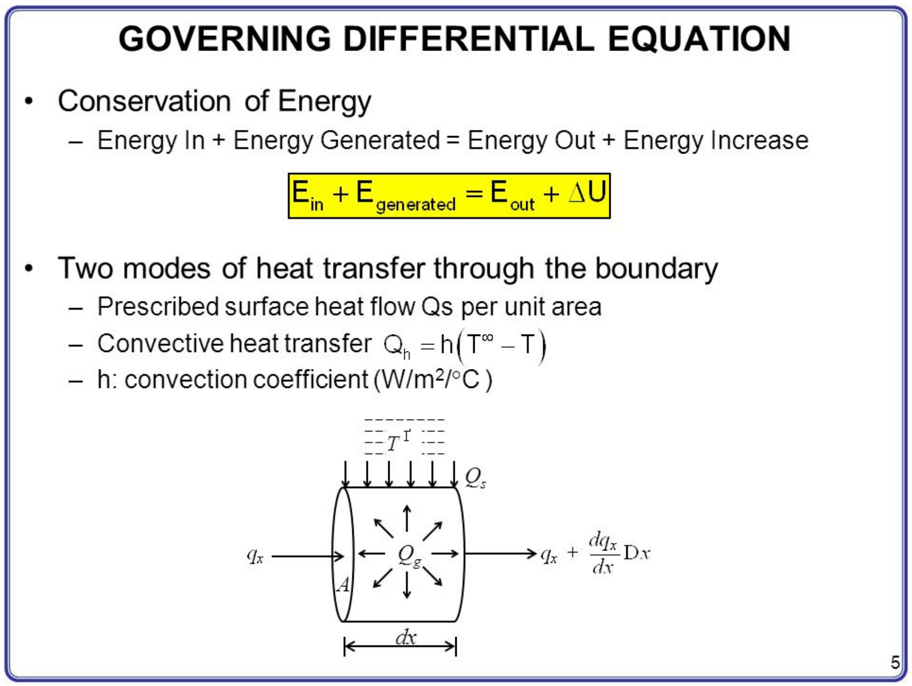
where $\varphi(x)$ is the dependent variable and is unknown and $f(x)$ is a known function.

i.e., $$L(\psi) + f \neq 0 \text{ or}$$
$$L(\psi) + f = R$$

where $R(x)$ is a measure of error commonly referred to as the residual.

Metoda energetskog balansa

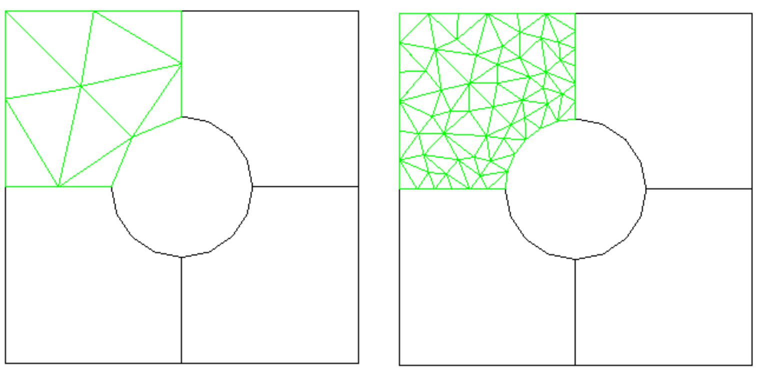
- Zasniva se na balansu različitih vidova energije
- Primenjuje se termostatičkoj i termodinamičkoj analizi kontinuuma.



IZVORI GREŠAKA U MKE

- Tri glavna izvora grešaka kod MKE rešenja su: greške u **diskretizaciji**, greške u **formulaciji** i **numeričke** greške**.**

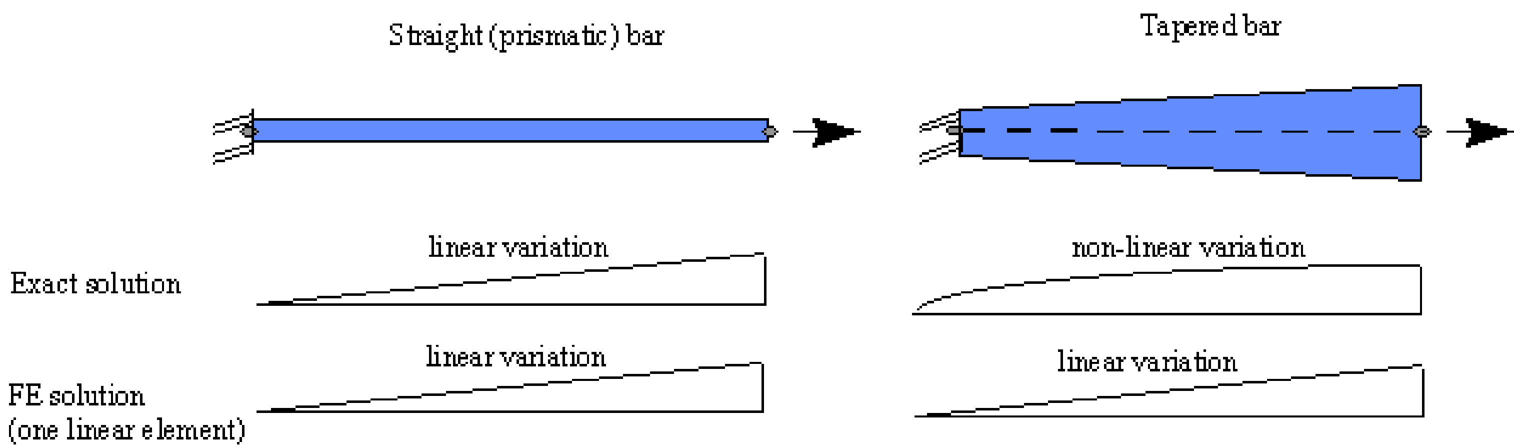
- **Greška u diskretizaciji** je rezultat pretvaranja fizičkog sistema (kontinuuma) u model konačnih elemenata i može se povezati sa modeliranjem graničnog oblika, graničnih uslova itd.



Greške diskretizacije se smanjuju povećanjem broja konačnih elemenata, odnosno smanjenjem veličine elemenata i teže nuli kada veličina konačnog elemenata teži nuli. Ove greške se smanjuju i primenom krivolinijskim konačnih elemenata pomoću kojih se bolje aproksimira geometrija tela ograničena nepravilnim konturama.

IZVORI GREŠAKA U MKE

- **Greška u formulaciji** rezultat je upotrebe elemenata koji ne opisuju precizno ponašanje fizičkog problema ili in
- Na primer, određeni konačni element može biti formulisan pod pretpostavkom da pomeranja variraju linearno u domenu. Takav element neće proizvesti grešku u formulaciji kada se koristi za modeliranje linearno promenljivog fizičkog problema (linearno promenljivo polje pomeranja u ovom primeru), ali će stvoriti značajnu grešku u formulaciji ako je ranije predstavljao kvadratno ili kubno promenljivo polje pomeranja.
- Greške interpolacionih funkcija – razlika između stvarnog polja nepoznate funkcije i njihove aproksimacije pomoću polinoma



IZVORI GREŠAKA U MKE

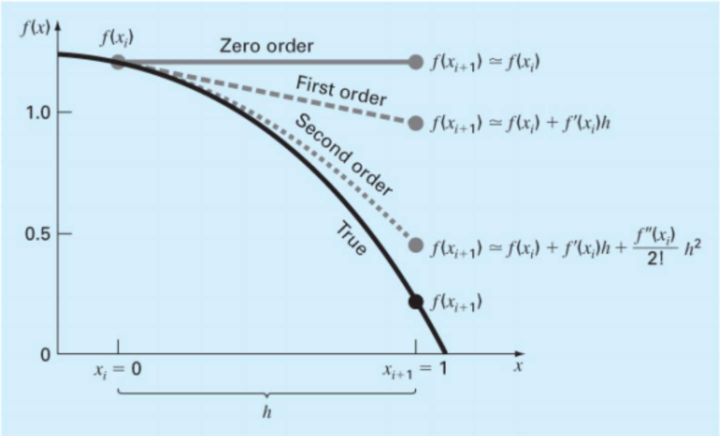
- **Numerička greška** nastaje kao rezultat numeričkih postupaka izračunavanja i uključuje greške **skraćivanja** i greške **zaokruživanja**.
- Numerička greška je stoga problem uglavnom koji se tiče razvoja MKE softvera odnosno odgovarajućih solvera.
- Korisnik takođe može da doprinese numeričkoj tačnosti, na primer, navođenjem fizičke veličine, recimo Young-ovog modula (E), na neadekvatan broj decimalnih mesta.

IZVORI GREŠAKA U MKE
numeričke greške

Greške u skraćivanju/aproksimaciji **(Truncation errors)** su one koje nastaju upotrebom aproksimacije umesto tačnog matematičkog postupka

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$



IZVORI GREŠAKA U MKE

numeričke greške

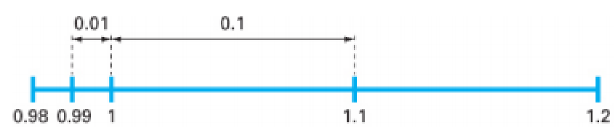
Greške zaokruživanja (Roundoff errors) nastaju jer digitalni računari ne mogu tačno da predstave neke veličine. Postoje dva glavna aspekta pogrešaka zaokruživanja koja su uključena u numeričke proračune:

- Digitalni računari imaju ograničenja veličine i preciznosti u mogućnosti da predstavljaju brojeve
- Određene numeričke manipulacije su veoma osetljive na greške zaokruživanja

– If 0.03125 is represented by the system as $3.1X10^{-2}$, a roundoff error is introduced

$$\frac{0.03125 - 0.031}{0.03125} = 0.008$$

– The roundoff error of a number will be proportional to its magnitude



IZVORI GREŠAKA U MKE
numeričke greške

- Roundoff error can happen in several circumstances other than just storing numbers - for example:
  - ***Large computations*** - if a process performs a large number of computations, roundoff errors may build up to become significant

```
function sout = sumdemo()
s = 0;
for i = 1:10000
  s = s + 0.0001;
% notice that 0.0001 cannot be expressed exactly in base - 2.
end
sout = s;
```

```
function sout = sumdemo()
s = 0;
for i = 1:10000
  s = s + 0.0001;
>> format long
>> sumdemo
ans =
   0.99999999999991
```

  - ***Adding a Large and a Small Number*** - Since the small number's mantissa is shifted to the right to be the same scale as the large number, digits are lost

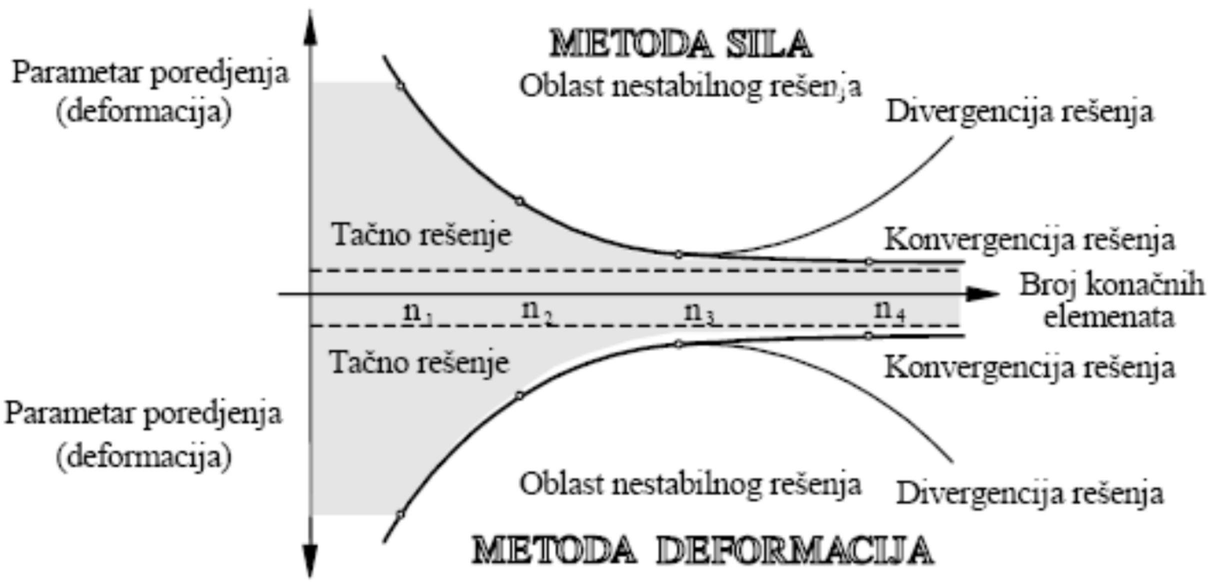
What if $0.0010 + 4000$ is represented with 4 - digit mantissa and 1 - digit exponent?

$$\begin{array}{ll} 4.000 & \times 10^3 \\ \underline{0.000001} & \underline{\times 10^3} \\ \underline{4.000}001 & \times 10^3 \quad (\text{chopped to } 4.000 \times 10^3) \end{array}$$

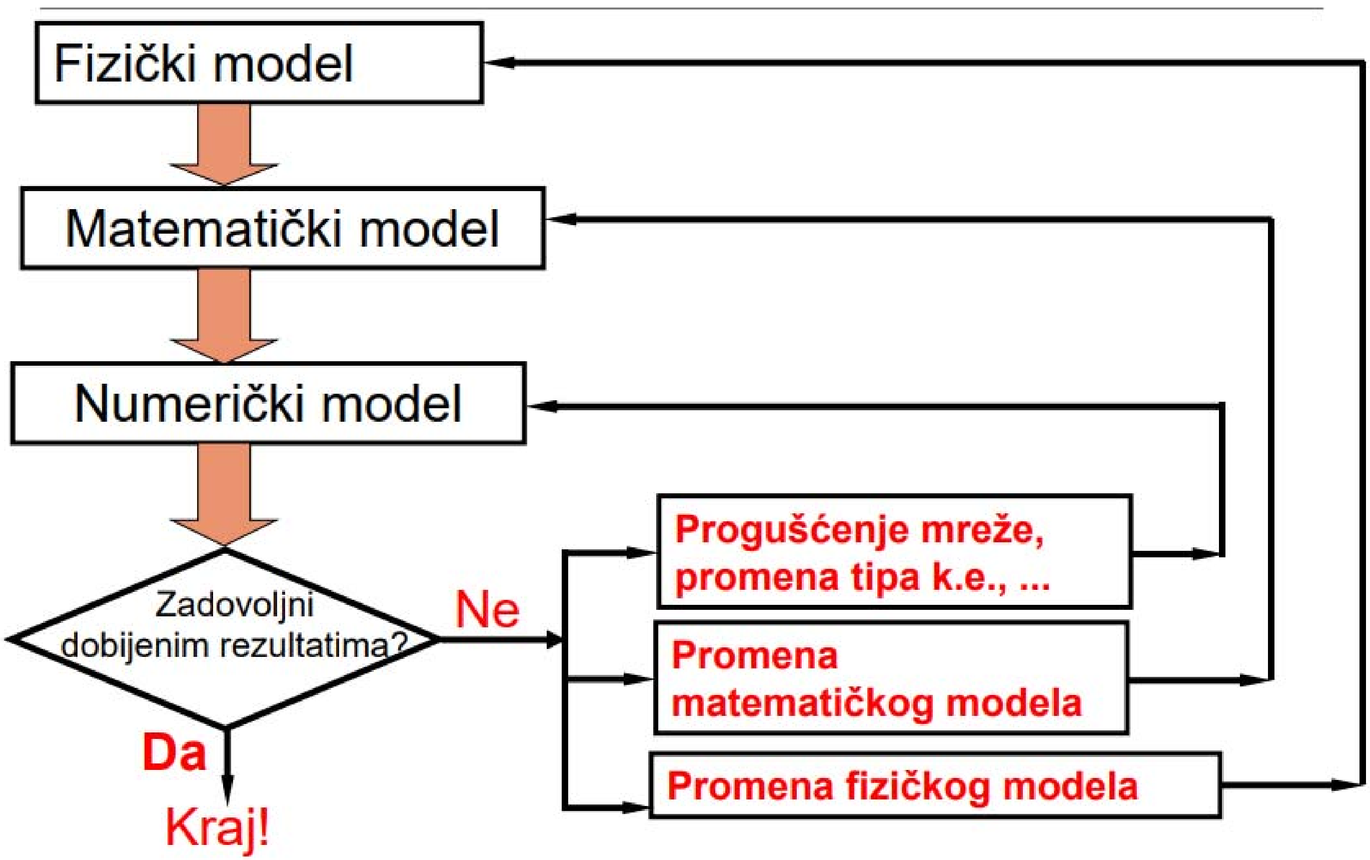
  - ***Smearing*** - Smearing occurs whenever the individual terms in a summation are larger than the summation itself
    - $(x + 10^{-20}) - x = 10^{-20}$ mathematically, but $x = 1$; $(x + 10^{-20}) - x$ gives a 0 in MATLAB!

Konvergencija rešenja

Rešenja koje se dobijaju po metodi konačnih elemenata u opštem slučaju su približna ili aproksimativna rešenja. Stoga se postavlja pitanje njihove tačnosti, stabilnosti i konvergencije.



Poboljšanje taćnosti rešenja



Prednosti MKE

- **Can readily handle complex geometry -** *nema ograničenja u pogledu geometrije dela*
- **Can handle complex analysis types -** *mogućnost sprovođenja kompleksnih analiza*
  - **Vibration**
  - **Transients**
  - **Nonlinear**
  - **Heat transfer**
  - **Fluids**
- **Can handle complex loading –** *mogućnost razmatranja kompleksnih opterećenja*
  - **Node-based loading (point loads).**
  - **Element-based loading (pressure, thermal, inertial forces).**
  - **Time or frequency dependent loading.**
- **Can handle complex restraints –** *analiza kompleksnih graničnih uslova / ograničenja*
  - **Indeterminate structures can be analyzed.**

Prednosti MKE

- **Can handle bodies comprised of nonhomogeneous materials –** ***analiza nehomogenih materijala:***
  - **Every element in the model could be assigned a different set of material properties.**
- **Can handle bodies comprised of nonisotropic materials** ***– analiza neizotropnih materijala***
  - **Orthotropic**
  - **Anisotropic**
- **Special material effects are handled –** ***analiza posebnih karakteristika materijala***
  - **Temperature dependent properties.**
  - **Plasticity**
  - **Creep**
  - **Swelling**
- **Special geometric effects can be modeled** ***– mogu se modelovati specijalni geometrijski efekti***
  - **Large displacements.**
  - **Large rotations.**
  - **Contact (gap) condition.**

Nedostatci MKE

- Za određeni problem dobija se određeni numerički rezultat - broj. Opšte rešenje zatvorene forme, koje bi omogućilo ispitivanje reakcije sistema na promene različitih parametara (kvalitativna analiza), teško izvodljivo.
- MKE se primenjuje na aproksimaciju matematičkog modela sistema (izvor takozvanih naslednih grešaka).
- Za formulisanje pouzdanog modela konačnih elemenata potrebno je veliko iskustvo i analitičnost.
- Moćan računar i pouzdan MKE softver su neophodni. Ulazni i izlazni podaci mogu biti veliki i zahtevni za pripremu i tumačenje.

Nedostatci MKE-nastavak

- Numerički nedostaci:
  - Računari imaju samo konačan broj značajnih cifara.
  - Zaokruživanje i gomilanje grešaka.
  - Problem uvezivanja krutih (malih) elemente na fleksibilne (velike) elemente.
- Podložno greškama modeliranja koje je predstavio korisnik:
  - Loš izbor tipova elemenata.
  - Urušeni elementi.
  - Geometrija nije adekvatno modelirana.
- Određeni efekti nisu automatski uključeni u solver:
  - Izvijanje - naburičavanje
  - Veliki otkloni i rotacije.
  - Nelinearnost materijala.
  - Ostale nelinearnosti.